

考虑羊群效应下网络视频运营商独播节目的宣传策略研究^{*}

吴昊 谭德庆

(西南交通大学 经济管理学院, 四川 成都 610031)

摘 要 考虑羊群效应和宣传效应对用户预期效用的影响, 本文运用最优控制理论构建独播节目利润最大化问题的决策模型, 得到节目的收费最优定价、免费最优广告量及最优宣传投入强度。研究表明: 收费模式中宣传效应对最优定价的影响特征和羊群效应有关, 并导致免费模式中最优广告量减少。在羊群效应较高情况下, 随着宣传效应的增加, 运营商能通过延长收费模式时间提高节目利润。在宣传总预算不变的约束下, 节目发布前后存在最优宣传期策略和宣传预算的最优分配策略。羊群效应影响节目发布后的最优宣传期策略和宣传预算在节目发布前后的最优分配策略, 但节目发布前的最优宣传期策略与羊群效应无关。

关键词 最优控制, 羊群效应, 独播节目, 宣传策略

中图分类号 F272.3

1 引言

近年来, 网络视频行业发展迅速, 行业竞争愈发激烈^①。在此背景下, 为能在激烈的竞争中脱颖而出, 各大视频运营商积极推出独播节目以实现差异化战略。根据艺恩网发布的报告^②, 2023 上半年各网络视频运营商共发布国产剧 136 部, 其中独播剧数量占比高达 83%。另一项调查数据显示^③, 爱奇艺、优酷和腾讯视频这三大平台的独播网络电影占全网影片的 93%。其中, 爱奇艺上线 305 部独播网络电影, 占全网上线影片的 46%, 是网络电影领域最大的播出平台。例如, 2024 年初热播的《猎冰》就是在腾讯视频平台通过独播的方式进行播出。以上数据和案例不仅说明了独播节目在网络视频市场中的重要地位, 也反映了各大视频运营商对于独播节目的重视。可见, 独播节目已成为视频运营商普遍采纳的节目类型, 通过独播节目, 运营商能够显著提升内容的差异化程度, 进而在市场中获得明显的竞争优势。同时, 视频运营商为了吸引更多用户观看其发布的新节目, 十分重视宣传策略。实际中, 视频运营商通常在新节目发布前即开展宣传推广, 这种“未发布即宣传”的现象在影视行业非常普遍, 业内无宣传不发行的理念^④充分说明了宣传策略的重要性。鉴于此, 独播节目

^{*}基金项目: 国家自然科学基金资助面上项目(71571149), 成都市软科学研究资助项目(2020-RK00-00179-ZF)。

通讯作者: 谭德庆, 西南交通大学经济管理学院, 教授、博士生导师, E-mail: tdq1966@126.com

① 2022 年中国在线视频行业研究报告, <https://www.mob.com/mobdata/report/154>。

② 2023H1 国产剧市场及趋势研究报告, <https://www.163.com/dy/article/I8O57L7H05383L0H.html>。

③ 总局监管中心发布《2020 网络原创节目发展分析报告》, <https://lmtw.com/mzw/content/detail/id/202309>。

④ 无宣传, 不发行——电影宣发横纵对比, https://www.sohu.com/a/120114428_555689?qq-pf-to=pcqq.c2c&spm=smpe.content.share.1.1591841725343KW491fQ。

作为网络视频领域的重要节目类型,如何更有效地实施宣传策略是一个具有现实意义的问题。

目前,网络视频节目的营收来源主要依靠用户付费和商业广告的投放收入。因此,节目播出模式选择、收费定价及广告投放量等相关决策是网络视频运营商面临的重要问题。对此,国内外学者从不同角度对相关问题进行了探索。例如,Fan等^[1]从网络成本视角构建理论模型分析了视频运营商的最优播出模式。Rong等^[2]运用平台理论探讨了影响网络视频运营商用户黏性的决定性因素。Amaldoss等^[3]从版权成本角度考察了播出模式对视频运营商利润的影响。Noh^[4]从节目类型视角分析了网络视频运营商的双重投资组合策略。基于双边市场角度^[5-7],Cheng等^[5]从用户选择行为入手建立决策模型分析了视频运营商的最优双边定价决策。范昊雯和张玉林^[6]从广告商目标受众差异化视角构建决策模型探讨了网络视频运营商的广告模式选择。Li等^[7]通过建立理论模型研究了广告商单归属与多归属特征对网络视频运营商节目利润的影响。王文怡等^[8,9]通过构建用户效用的理论模型,分析了用户学习成本和社会影响等因素对视频节目最优提供模式选择的影响。李子庆和谭德庆^[10,11]分别在垄断和竞争情况下构建决策和博弈模型探讨了节目试看对视频运营商播出模式、价格及广告量等最优策略的影响。

影视节目的播出模式、定价及广告量等策略固然是影响运营商收益的关键,但要提高影视节目的知名度及吸引观众,宣传策略至关重要。因此,一些学者也对影视节目的宣传策略进行了研究,这些研究主要集中在电影和电视领域。例如,Kampani和Nicolaidis^[12]研究发现,电影等体验类产品在发布前的广告宣传至关重要,提前宣传是影响电影首映票房是否成功的关键驱动力。Meng和He^[13]认为产品发布之前的广告宣传能吸引并激发消费者的兴趣,从而提高产品销量。Lee等^[14]研究表明,电影的预告片或海报宣传是消费者付费的重要原因,也是确保电影成功的前提。Franses^[15]构建了电影票房的收入模型,发现电影上映前的预告片和广告能吸引基于内在动机的消费者,从而导致电影票房高峰出现在第一周。Rennhoff和Wilbur^[16]研究发现电影上映后的广告宣传对于票房的提升仍然有效。孙春华和刘业政^[17]研究了电影预告片的发布策略,发现提前和密集发布能增强电影的营销效果,并且上映后继续发布仍然有助于提高票房。张钰琮^[18]分析了电视节目宣传的有效性,指出增加传播载体的多元性、强化传播内容的有效性能够提高电视节目的宣传效果。王京^[19]从创新角度深入剖析了电视节目的宣传推广策略。慕莹^[20]从视觉效果和人文理念等方面对电视综艺节目的宣传推广策略进行了定性分析。

除市场宣传的影响外,人们的决策往往还会受到大众选择的影响,从而产生趋同,这种现象称为羊群效应,也叫从众心理^[21-25]。面向不同领域,学者对羊群效应相关问题开展了广泛的研究。例如,在金融市场,Wanidwaranan和Termprasertsakul^[21]考虑了加密货币市场中存在的羊群行为,探究了羊群行为与市场回报、熊市及网络效应之间的关系。另一项由Xue等^[22]进行的研究则聚焦于共同基金中的羊群效应对中国股市的影响。结果表明,羊群行为显著放大了未来一年半的特异性波动,尤其在持股比例高和投资者情绪高涨时更为显著。此外,徐浩等^[23]针对群体性突发事件中非直接利益相关者存在的羊群行为,分析了羊群行为的演化机理。邵晓双和谭德庆^[24]从私家车消费过程中的从众心理出发,探讨了羊群效应对私家车企业最优动态价格与市场中私家车保有量及燃油价格变化关系的影响。在网络视频市场,谭德庆和吴昊^[25]考虑了羊群效应对用户预期效用的影响,构建连续决策模型研究了羊群效应对视频节目定价、广告量及免费模式推出时间等市场策略的影响。

通过对以上现有文献的回顾可以发现:一方面,关于视频运营商市场策略的研究多数是从诸如网络成本、用户黏性、节目类型及双边市场等不同的视角,通过构建离散的两阶段模型展开问题分析,这些研究在多方面为视频运营商提供了宝贵的理论支持和策略指导。仅有谭德庆和吴昊^[25]采用了时间连续的决策模型探讨了羊群效应如何影响视频运营商的市场策略。由于市场策略通常与时间相关,因此,采用时间连续模型研究该问题更符合实际。另一方面,尽管针对影视媒体宣传策略的研究较多,但是从理论

模型视角研究视频节目宣传策略的文献尚未见到。实际中,对于视频运营商来说,在新节目发布的前后时期采用宣传策略是必不可少的环节,这是因为宣传策略通常能提高用户对节目的预期效用,从而吸引更多观众。考虑到宣传期、宣传投入等策略往往具有时间连续性,因此,选择时间连续模型研究视频节目的宣传策略是非常合适的。此外,根据相关文献^[21-25],羊群效应也是影响用户决策行为的重要因素。直观上看,网络视频市场中宣传策略和羊群效应相互促进。具体来说,宣传策略能吸引更多用户观看节目,而观看人数的增加也会进一步增强羊群效应;反过来,羊群效应的增强会提升用户对节目的预期效用,从而使宣传策略的效果更好。因此,应同时考虑羊群效应和宣传策略对用户预期效用的影响,探究宣传策略与羊群效应之间的内在机理,这不仅对于视频运营商制定更为精准和有效的宣传策略具有现实意义,也是对网络视频相关问题研究^[25]的补充和拓展。

鉴于此,本文在谭德庆和吴昊^[25]研究的模型框架基础上,引入宣传策略对用户预期效用的影响,建立视频运营商独播节目的连续决策模型,探讨羊群效应如何与宣传策略、节目收费定价、免费广告量及免费模式推出时间等市场策略相互作用。在此基础上,进一步研究羊群效应与节目发布前后的最优宣传期、宣传总预算在节目发布前后的最优分配等宣传策略之间的关系。

2 基本模型

2.1 基本假设

目前,网络视频运营商在发布新节目时,通常先采用一定时期的收费模式,收费期内用户需付费观看该节目。待收费期过后,再将节目转为免费模式,所有用户均可免费观看。收费模式又称为节目的增值服务,付费用户不仅能提前观看,还享有免广告及音(画)质提升等特权。免费模式用户无提前观看特权,在观看过程中还需承受商业广告干扰。同时,免费模式的服务器性能通常较低,导致音(画)质不清晰且易出现卡顿等问题。因此,观看同一节目时,免费用户的体验感低于付费用户。基于以上实际特点,做如下基本假设:

(1) 假设在0时刻,运营商采用收费模式发布该节目,节目体验质量为 β_p , t 时刻的节目定价为 $p(t)$ 。从 t_0 时刻起($t_0 > 0$ 且为外生变量),运营商采用免费模式,节目体验质量为 β_n , t 时刻节目中插入的广告量为 $n(t)$,参考相关研究^[25],假设 $\beta_n < \beta_p$ 。

(2) 实际中,由于在新节目发布的前后,运营商通常均会进行一定时期的宣传。为此,假设运营商在节目发布前的宣传期为 $[-\Delta t, 0]$,节目发布后的宣传期为 $[0, t_m]$,其中 $\Delta t \geq 0$, $t_m \geq 0$,且均为外生变量。借鉴相关文献^[26, 27],宣传投入强度对消费者的影响具有累积性,并且影响随时间而衰减。为此,假设 τ 时刻运营商对该节目的宣传投入强度为 $k(\tau)$,并在未来的 t 时刻对用户的影响衰减为 $\eta e^{-\delta(t-\tau)}k(\tau)$,其中, $\eta > 0$ 为宣传效应影响系数, $\delta > 0$ 为衰减因子,则在 t 时刻累积的宣传投入强度对用户产生的宣传效应为 $\eta A(t) = \eta \int_{-\Delta t}^t e^{-\delta(t-\tau)} k(\tau) d\tau$ 。

(3) 假设运营商的宣传投入总预算为 C ,其中用于节目发布前的宣传预算为 χC , $\chi \in [0, 1]$,用于节目发布后的宣传预算则为 $(1 - \chi)C$ 。借鉴现有研究^[28-30],宣传投入强度 $k(\tau)$ 和宣传投入成本 $c(\tau)$ 具有二次函数特征,假设 $\frac{1}{2}k^2(\tau) = c(\tau)$,则有 $\int_{-\Delta t}^0 c(\tau) d\tau \leq \chi C$, $\int_0^{t_m} c(\tau) d\tau \leq (1 - \chi)C$ 。

(4) 目前,运营商在免费模式中插入的广告通常采用CPM(cost per mille,每千次展示成本)收费

方式，即运营商根据观看广告的实际用户数量向投放广告的企业收费。同时借鉴已有研究^[31-33]，本文采用 CPM 收费方式，假设运营商以单位用户向投放广告企业收取的广告费为 κ 。

(5) 由于不同用户对同一节目具有异质性，即不同用户对同一节目的体验质量存在差异。因此，假设 $\theta(t)$ 类型用户对于体验质量为 β_i 的节目，其实际体验质量为 $\theta(t)\beta_i$ ， $i = p, n$ 。借鉴已有文献^[10, 11, 34, 35]，进一步假设用户类型均匀分布于 $[0, 1]$ 区间。

(6) 实际中，视频节目市场中的羊群效应主要表现为观看节目的用户量越多，羊群效应就越强^[21-25, 36]。借鉴已有文献^[24, 25, 36]，假设羊群效应系数为 $\vartheta > 0$ ，并假设在 $[0, t_0]$ 阶段， t 时刻前付费观看该节目的累积用户量为 $x_p(t)$ ，则 t 时刻前观看该节目用户量产生的羊群效应为 $\vartheta x_p(t)$ ；假设在 t_0 点之后， t 时刻前免费观看该节目的累积用户量为 $x_n(t)$ ，则 t 时刻前所有观看该节目用户量产生的羊群效应为 $\vartheta(x_p(t_0) + x_n(t))$ 。

根据以上基本假设，可通过图 1 对运营商在不同阶段的决策过程进行直观的进行表示。

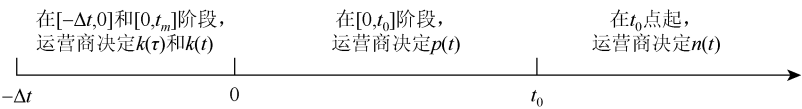


图 1 运营商的决策顺序图

文中涉及的符号含义归纳至表 1。

表 1 符号及含义

符号	含义
β_p / β_n	节目在收费/免费模式下的体验质量
$p(t)$	收费模式下 t 时刻的节目定价
α_p	用户对收费价格的敏感性
$n(t)$	免费模式下 t 时刻节目中嵌入的广告量
α_n	用户对广告量的敏感性
t_0	运营商开始采用免费模式的时间
Δt	运营商在节目发布前的宣传期长度
t_m	运营商在节目发布后的宣传期长度
$k(t)$	t 时刻的宣传投入强度
$A(t)$	累积宣传投入强度产生的宣传效应
η	宣传效应影响系数
δ	衰减因子
C	宣传投入总预算
χ	宣传投入总预算在节目发布前的分配比例
κ	运营商以单位免费用户向投放广告的企业收取的费用
$\theta(t)$	用户类型
ϑ	羊群效应系数
$x_p(t) / x_n(t)$	收费/免费模式下 t 时刻前付费/免费观看该节目的累积用户量
$D_p(t) / D_n(t)$	收费/免费模式下 t 时刻付费/免费观看该节目的用户量

2.2 动态需求分析

在0时刻, 运营商采用收费模式向市场中发布该节目。实际中, 由于羊群效应和运营商进行的节目宣传产生的宣传效应通常都会提高用户对该节目的预期效用。因此, 可假设类型为 $\theta(t)$ 的用户付费观看该节目获得的预期效用为 $E_p(U) = \theta(t)\beta_p - \alpha_p p(t) + \eta A(t) + \mathcal{G}x_p(t)$, 其中 $\alpha_p > 0$ 为用户对收费价格的敏感性。当 $E_p(U) \geq 0$ 时, 用户会选择付费观看该节目; 当 $E_p(U) < 0$ 时, 用户会选择不观看该节目。令 $E_p(U) = 0$, 可得用户选择付费观看和选择不观看该节目的效用无差异点为 $\theta_p^*(t) = \frac{\alpha_p p(t) - \eta A(t) - \mathcal{G}x_p(t)}{\beta_p}$ 。也就是说, 在 t 时刻, 类型为 $\theta(t)$ 的用户若满足 $\theta(t) \geq \theta_p^*(t)$, 会选择付费观看该节目; 否则, 会选择不观看该节目。由于 $\theta(t)$ 表示 t 时刻前尚未观看该节目的用户类型且 $\theta(t) \leq 1$, 因此, 不妨设在 t 时刻前, 尚未观看该节目用户分布于 $[0, \theta(t)]$ 。则在 t 时刻, 选择付费观看该节目的用户量为 $D_p(t) = \int_{\theta_p^*(t)}^{\theta(t)} d\theta(t) = \theta(t) - \theta_p^*(t)$ 。由假设(6)可知, t 时刻前付费观看该节目的累积用户量为 $x_p(t)$, 这意味着, 在 t 时刻前, 尚未观看该节目的用户总量为 $1 - x_p(t)$ 。同时, 也说明在 t 时刻前, 未观看该节目的用户均匀分布于 $[0, 1 - x_p(t)]$, 则有 $1 - x_p(t) = \theta(t)$ 。将 $1 - x_p(t)$ 和 $\theta_p^*(t)$ 代入 $D_p(t)$, 可得在 t 时刻, 付费观看该节目的用户量为

$$D_p(t) = \int_{\theta_p^*(t)}^{\theta(t)} d\theta(t) = 1 - x_p(t) - \frac{\alpha_p p(t) - \eta A(t) - \mathcal{G}x_p(t)}{\beta_p} \quad (1)$$

从 t_0 时刻起, 运营商采用免费模式推出该节目, 即 t_0 点为收费模式和免费模式的时间转换点。则类型为 $\theta(t)$ 的用户免费观看该节目获得的预期效用为 $E_n(U) = \theta(t)\beta_n - \alpha_n n(t) + \eta A(t) + \mathcal{G}(x_p(t_0) + x_n(t))$, 其中 $\alpha_n > 0$ 为用户对广告数量的敏感性。当 $E_n(U) \geq 0$ 时, 用户会选择免费观看该节目; 当 $E_n(U) < 0$ 时, 用户会选择不观看该节目。令 $E_n(U) = 0$, 可得用户选择免费观看和选择不观看该节目的效用无差异点为 $\theta_n^*(t) = \frac{\alpha_n n(t) - \eta A(t) - \mathcal{G}(x_p(t_0) + x_n(t))}{\beta_n}$ 。同理于收费阶段的分析过程, 可得在免费阶段 t 时刻, 免费观看该节目的用户量为

$$D_n(t) = 1 - x_p(t_0) - x_n(t) - \frac{\alpha_n n(t) - \eta A(t) - \mathcal{G}(x_p(t_0) + x_n(t))}{\beta_n} \quad (2)$$

2.3 最优决策分析

本文将节目的播放期设置为 $[0, T]$, 在不改变分析结论的前提下, 假设节目的宣传成本之外的其他成本为零。运营商的目标是最大化播放期内的总利润。由于这个问题可视为多阶段问题, 因此本文采用逆序多阶段动态求解法。

在 $[t_0, T]$ 阶段, 运营商采用免费模式推出该节目。因此, 运营商应决定该节目在免费模式中嵌入的广告量 $n(t)$, 使其在本阶段利润 π_2 最大化。目标函数可表示为

$$\begin{cases} \max_{n(t)} \pi_2 = \int_{t_0}^T \kappa n(t) D_n(t) dt \\ \text{s.t. } x_n(t_0) = 0, D_n(t) = \dot{x}_n(t) \end{cases} \quad (3)$$

目标函数 (3) 是一个积分函数, 表示运营商在 $[t_0, T]$ 阶段采用免费模式播出该节目获得的利润。其中, 被积函数表示 t 时刻的利润, 该利润由 t 时刻节目中嵌入的广告量 $n(t)$ 、免费观看该节目的用户量 $D_n(t)$ 及运营商以单位免费观看节目用户向投放广告的企业收取的费用 κ 三者的乘积决定。

根据最优控制理论, 目标函数 (3) 对应的哈密顿函数为

$$H_2 = (\kappa n(t) + \lambda_n(t)) D_n(t)$$

该节目在免费模式中嵌入的广告量 $n(t)$ 应满足的最优化一阶条件为

$$\frac{\partial H_2}{\partial n(t)} = \kappa D_n(t) - \frac{\kappa \alpha_n n(t) + \alpha_n \lambda_n(t)}{\beta_n} = 0 \quad (4)$$

状态变量 $x_n(t)$ 和与其对应的协状态变量 $\lambda_n(t)$ 应满足的约束条件为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_n(t) = -\frac{\partial H_2}{\partial x_n(t)} \\ \lambda_n(T) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

联立式 (4) 和式 (5), 求解可得该节目在免费模式中嵌入的最优广告量为

$$n^*(t) = \frac{\beta_n (1 - x_p(t_0) - x_n(t)) + \eta A(t) + \mathcal{G}(x_p(t_0) + x_n(t))}{2\alpha_n} \quad (6)$$

其中状态变量为 $x_n^*(t) = \frac{1}{2\beta_n} \int_{t_0}^t e^{-\frac{(\beta_n - \mathcal{G})(t-\tau)}{2\beta_n}} [\beta_n (1 - x_p(t_0)) + \eta A(\tau)] d\tau$, 表示在该阶段 t 时刻前免费观看该节目的累积用户量。

在 $[0, t_0]$ 阶段, 运营商采用收费模式推出该节目。因此, 运营商应决定该节目在收费模式中的价格 $p(t)$, 使其在 $[0, t_0]$ 和 $[t_0, T]$ 阶段的总利润 π_1 最大化。目标函数可表示为

$$\begin{cases} \max_{p(t)} \pi_1 = \int_0^{t_0} p(t) D_p(t) dt + \pi_2(n^*(t)) \\ \text{s.t. } x_p(0) = 0, D_p(t) = \dot{x}_p(t) \end{cases} \quad (7)$$

目标函数 (7) 由积分函数和 $[t_0, T]$ 阶段的最优利润 $\pi_2(n^*(t))$ 相加组成。其中, 积分函数表示运营商在 $[0, t_0]$ 阶段采用收费模式播出该节目获得的利润, 且被积函数表示 t 时刻的利润, 该利润由 t 时刻的价格 $p(t)$ 和付费观看该节目的用户量 $D_p(t)$ 两者的乘积决定。

根据最优控制理论, 目标函数 (7) 对应的哈密顿函数为

$$H_1 = (p(t) + \lambda_p(t)) D_p(t)$$

该节目在收费模式中价格 $p(t)$ 应满足的最优化一阶条件为

$$\frac{\partial H_1}{\partial p(t)} = D_p(t) - \frac{\alpha_p p(t) + \alpha_p \lambda_p(t)}{\beta_p} = 0 \quad (8)$$

状态变量 $x_p(t)$ 和与其对应的协状态变量 $\lambda_p(t)$ 应满足的约束条件为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_p(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial x_p(t)} \\ \lambda_p(t_0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

联立式 (8) 和式 (9), 求解可得该节目在收费模式中的最优价格为

$$p^*(t) = \frac{\beta_p(1-x_p(t)) + \eta A(t) + \vartheta x_p(t)}{2\alpha_p} \quad (10)$$

其中状态变量为 $x_p^*(t) = \frac{1}{2\beta_p} \int_0^t e^{-\frac{(\beta_p - \vartheta)(t-\tau)}{2\beta_p}} (\beta_p + \eta A(\tau)) d\tau$ ，表示在该阶段 t 时刻前付费观看该节目的累积用户量。

在 $[0, t_m]$ 阶段，运营商对该节目进行发布后的宣传投入 ($t_m \in [0, T]$)。因此，运营商应决定在 $[0, t_m]$ 阶段内的宣传投入强度 $k(t)$ ，使其在播放期 $[0, T]$ 内的总利润 π_0 最大化。目标函数可表示为

$$\begin{cases} \max_{k(t)} \pi_0 = \pi_1(p^*(t)) - \int_0^{t_m} \frac{1}{2} k^2(t) dt \\ \text{s.t. } \dot{\xi}(t) = k(t), \frac{1}{2} \int_0^{t_m} k^2(t) dt \leq (1-\chi)C \end{cases} \quad (11)$$

目标函数 (11) 由 $[0, T]$ 阶段的最优利润 $\pi_1(p^*(t))$ 与积分函数之差组成。其中，积分函数表示运营商在节目发布后的 $[0, t_m]$ 阶段消耗的宣传投入成本，且被积函数表示 t 时刻的宣传成本。

根据最优控制理论，目标函数 (11) 对应的哈密顿函数为

$$H_0 = \lambda_m(t) \dot{\xi}(t) - \frac{1}{2} k^2(t)$$

该节目在发布后的宣传期内宣传投入强度 $k(t)$ 应满足的最优化一阶条件为

$$\frac{\partial H_0}{\partial k(t)} = \lambda_m(t) - k(t) = 0 \quad (12)$$

状态变量 $k(t)$ 和与其对应的协状态变量 $\lambda_m(t)$ 应满足的约束条件为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_m(t) = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi(t)} \\ \lambda_m(t_m) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

联立式 (12) 和式 (13)，求解可得该节目在发布后的最优宣传投入强度为

$$k^*(t) = \sqrt{\frac{2(1-\chi)C}{t_m}} \quad (14)$$

在 $[-\Delta t, 0]$ 阶段，运营商对该节目进行发布前的宣传投入。因此，运营商应决定在 $[-\Delta t, 0]$ 阶段内的宣传投入强度 $k(\tau)$ ，使其在播放期 $[0, T]$ 内的总利润 π 最大化。目标函数可表示为

$$\begin{cases} \max_{k(\tau)} \pi = \pi_0(k^*(t)) - \frac{1}{2} \int_{-\Delta t}^0 k^2(\tau) d\tau \\ \text{s.t. } \dot{\zeta}(\tau) = k(\tau), \frac{1}{2} \int_{-\Delta t}^0 k^2(\tau) d\tau \leq \chi C \end{cases} \quad (15)$$

目标函数 (15) 由 $[0, t_m]$ 和 $[0, T]$ 阶段的最优利润 $\pi_0(k^*(t))$ 与积分函数之差组成。其中，积分函数表示运营商在节目发布前的 $[-\Delta t, 0]$ 阶段消耗的宣传投入成本，且被积函数表示 τ 时刻的宣传成本。

根据最优控制理论，目标函数 (15) 对应的哈密顿函数为

$$H = \lambda(\tau) \dot{\zeta}(\tau) - \frac{1}{2} k^2(\tau)$$

该节目在发布前的宣传期内宣传投入强度 $k(\tau)$ 应满足的最优化一阶条件为

$$\frac{\partial H}{\partial k(\tau)} = \lambda(\tau) - k(\tau) = 0 \quad (16)$$

状态变量 $k(\tau)$ 和与其对应的协状态变量 $\lambda(\tau)$ 应满足的约束条件为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial \zeta(\tau)} \\ \lambda(0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

联立式 (16) 和式 (17), 求解可得该节目在发布前的最优宣传投入强度为

$$k^*(\tau) = \sqrt{\frac{2\chi C}{\Delta t}} \quad (18)$$

3 结论分析

根据以上最优决策能发现, 运营商首先采用收费模式发布节目后, 宣传效应不仅影响本阶段的最优价格, 还会影响免费阶段广告量的最优决策。为此, 下文首先分析收费阶段宣传效应对本阶段收费价格的影响特征, 并探讨其对免费阶段广告量的进一步影响。

结论 1 在收费阶段, 若羊群效应较低 (即满足 $\vartheta < \vartheta_p^*$), 节目最优定价随着宣传效应的增加而降低; 若羊群效应较高 (即满足 $\vartheta > \vartheta_p^*$), 节目最优定价随着宣传效应的增加而增加。而在免费阶段, 最优广告量随着收费阶段宣传效应的增加而降低。

证明: 见附录。

结论 1 表明, 羊群效应的大小决定了宣传策略是否具备提升节目价格的能力。当羊群效应较低时, 其给用户带来的正效用不足以抵消宣传效果衰减造成的负效用。因此, 随着宣传效应的增加, 运营商应持续保持低价策略刺激用户的付费欲望; 反之, 当羊群效应较高时, 其给用户带来的正效用能够完全抵消宣传效果衰减造成的负效用。因此, 随着宣传效应的增加, 运营商应采取高价策略以充分利用宣传对用户产生的积极影响。而在免费阶段, 无论收费阶段采用何种价格策略, 随着收费阶段宣传效应的增加, 运营商应始终采取低广告量策略。因为收费阶段宣传效应的增加会导致部分免费用户提前选择付费观看该节目, 从而挤压了免费阶段的潜在市场。为了吸引更多低类型用户免费观看节目, 运营商应通过减少广告投放量的策略来平衡用户效用。综上, 在实际的运营管理中, 运营商应根据市场中羊群效应的影响力度, 同时结合自身的宣传推广能力制定最优的价格和广告投放量等策略。

宣传效应如何影响收费-免费的模式转换时间, 通过分析, 得出结论 2 (证明过程见附录)。

结论 2 在羊群效应较低情况下 (即满足 $\vartheta < \vartheta_{t_0}^*$), 收费与免费的模式转换时间随着宣传效应的增加而提前; 在羊群效应较高情况下 (即满足 $\vartheta > \vartheta_{t_0}^*$), 收费与免费的模式转换时间随着宣传效应的增加而推迟。

结论 2 表明, 收费模式与免费模式的转换时间和宣传效应的关系受到羊群效应的影响。若羊群效应较低, 宣传效果越好, 运营商应提早进行模式转换; 反之, 若羊群效应较高, 宣传效果越好, 运营商应推迟进行模式转换。其原因是, 当羊群效应处于较低水平时, 运营商难以通过宣传策略提高节目的收费价格 (结论 1)。因此, 运营商应较早进行模式转换以吸引更多低类型用户免费观看节目; 当羊群效应处于较高水平时, 运营商能通过宣传策略提高节目的收费价格, 此时, 运营商应推迟进行模式转换以增加节目收费模式的利润。综上, 运营商应充分考虑羊群效应和宣传效应的大小, 合理把握收费模式与免费模式的转换时机, 以实现利润的增加。

以上结论分析了宣传效应对节目收费模式价格的影响与羊群效应之间的关系,以及宣传效应对价格的影响如何进一步影响免费模式中的广告量和转换时间等。下面,在收费模式的价格、免费模式的广告量及节目发布前后宣传投入强度均为最优决策的条件下,同时受到宣传总预算上限为 C 的约束,进一步分析节目发布前后的最优宣传期、宣传总预算在节目发布前后的最优分配比例等宣传策略,以及这些宣传策略与羊群效应的关系。首先,探讨节目发布前的宣传期策略,通过分析可得出结论 3 (证明过程见附录)。

结论 3 运营商在节目发布前的最优宣传期长度为 Δt^* , 且 Δt^* 与羊群效应无关。

结论 3 表明,在宣传总预算具有上限约束下,运营商在节目发布前,能够通过优化宣传期长度提高节目利润。换言之,在节目发布前,运营商存在最优的宣传期策略,并且节目发布前的最优宣传期不受羊群效应影响。原因在于,节目发布前的宣传期和节目发布后用户的选择决策是分离的,也就是说,这部分宣传进行时,用户的决策尚未发生。该宣传效应虽然会影响节目发布后的用户数量,进而通过羊群效应影响用户规模,但这种影响是恒定的且不断衰减,结合附录中的证明过程,节目发布前形成的宣传效应对运营商利润的影响具有线性特征。这意味着,通过优化宣传期长度来最大化节目发布前的宣传效应能使运营商利润最大。因此,节目发布前的最优宣传期和羊群效应无关。

综上,本结论的策略建议是:运营商在制定节目发布前的宣传期策略时,不必过于关注羊群效应的影响。在节目发布前,运营商运用宣传期策略实现的目标应是通过最大化前期宣传效果来建立初始的用户基础,吸引更多潜在用户的关注和预期,从而实现利润的增加。

在节目发布前的宣传期为最优策略下,进一步探讨宣传总预算在节目发布前后的最优分配策略,以及分配策略与羊群效应的内在联系。通过分析可得出结论 4 (证明过程见附录)。

结论 4 运营商的宣传总预算在节目发布前后的最优分配为 $\chi^* C$ 和 $(1 - \chi^*) C$ 。在羊群效应较低情况下 (即满足 $\vartheta < \vartheta_\chi^*$), 宣传总预算在节目发布前的最优分配大于在节目发布后的最优分配 (即 $\chi^* > \frac{1}{2}$); 在羊群效应较高情况下 (即满足 $\vartheta > \vartheta_\chi^*$), 宣传总预算在节目发布前的最优分配小于在节目发布后的最优分配 (即 $\chi^* < \frac{1}{2}$)。

结论 4 表明,宣传总预算在节目发布的前后存在最优分配策略,并且最优分配策略受到羊群效应的影响。若羊群效应较低,运营商应将分配策略的重点放在节目发布前;而当羊群效应较高时,运营商则应将分配策略的重点转向节目发布后。这是因为,在羊群效应较低情况下,其对用户效用的影响有限。因此,节目发布后的宣传投入对羊群效应的促进作用也相对不足。在此情形下,运营商应将宣传投入的重点放在节目发布之前,以期在节目发布时能形成较大的前期宣传效果。然而,当羊群效应较高时,其对用户效用的影响相对较大。在此时,运营商应将宣传投入的重点放在节目发布之后,以充分利用宣传策略对羊群效应的促进作用提高节目利润。

综上,结论 4 的策略建议是:运营商应根据市场环境中羊群效应的高低来平衡节目发布前后的宣传分配策略。在羊群效应较低时,运营商应侧重于节目发布前的宣传投入,通过提前宣传形成较大的前期宣传效果。虽然提前宣传形成的效果随时间的衰减更多,但在吸引潜在用户方面仍然更为有效。而在羊群效应较高时,运营商应充分利用宣传策略对羊群效应的影响,通过增加节目发布后的宣传投入来进一步放大羊群效应,促进用户的选择行为,以更好地刺激市场需求,从而提高节目利润。

在结论 3 和结论 4 的最优策略下,最后探讨节目发布后的最优宣传期策略,以及羊群效应对该策略的影响。通过分析可得出结论 5 (证明过程见附录)。

结论 5 运营商在节目发布后的最优宣传期长度为 t_m^* 。在羊群效应低于 $\vartheta_{t_m}^*$ 情况下, $t_m^* = 0$; 在羊群效应高于 $\vartheta_{t_m}^*$ 情况下, $t_m^* = T$ 。

通过结论 3~5, 可对运营商的最优宣传策略进行梳理, 包括节目发布前的宣传期策略、宣传总预算在节目发布前的分配策略及节目发布后的宣传期策略, 羊群效应与以上最优策略的关系可归纳至表 2。

表 2 羊群效应对运营商最优宣传策略的影响

运营商的最优宣传策略	羊群效应 $\mathcal{G}$				
	$< \mathcal{G}_m^*$	$= \mathcal{G}_m^*$	$(\mathcal{G}_m^*, \mathcal{G}_\chi^*)$	$= \mathcal{G}_\chi^*$	$> \mathcal{G}_\chi^*$
Δt^*	不变	不变	不变	不变	不变
χ^*	$= 1$	$> 1/2$	$> 1/2$	$= 1/2$	$< 1/2$
t_m^*	$= 0$	$< T$	$= T$	$= T$	$= T$

由表 2 可以直观地看出, 当羊群效应低于阈值 $\mathcal{G}_m^*$ 时, 运营商只需在节目发布前实施宣传策略即可。然而, 当羊群效应不低于该阈值时, 运营商在节目发布的前后都应采取宣传策略。这是因为, 当羊群效应过低时, 说明其对用户的选择行为影响微弱。因此, 节目发布后的宣传对提升羊群效应的作用也会很小。在这种情况下, 运营商应放弃后期宣传, 只在节目发布前实施宣传策略, 通过提前宣传积累效果, 从而达到提高用户预期的作用; 当羊群效应达到甚至超过该阈值时, 其对用户的选择行为产生了一定影响。因此, 运营商有必要在节目发布后开展宣传策略。特别是在羊群效应超过该阈值时, 运营商应在播放期内一直采取宣传策略持续刺激市场需求。此外, 通过表 2 还能观察到, 随着羊群效应进一步超过 $\mathcal{G}_\chi^*$ 水平, 宣传总预算在节目发布后的最优分配比例大于在节目发布前的最优分配比例, 即为结论 4。

可见, 这不仅说明了结论 5 和结论 4 与羊群效应的关系在逻辑上保持一致, 同时也说明了结论 5 是从宣传期策略的角度对结论 4 进行的细化和拓展。

综上, 结论 5 的策略建议是: 与节目发布前的宣传期策略不同, 运营商应重视羊群效应对节目发布后宣传期策略的影响。具体而言, 运营商应根据羊群效应对用户的影响程度决定是否采取宣传策略, 以及如何配合宣传预算分配策略来制定更为具体的宣传期策略。特别是在羊群效应对用户产生较大影响的情况下, 节目发布后的宣传期策略尤为关键。此时, 运营商需要确保宣传和节目播放的同步性, 甚至需要加大宣传投入, 以持续刺激市场需求和增强羊群效应, 从而最大化宣传效果。

4 结束语

本文在考虑羊群效应情况下, 通过构建网络视频运营商的连续决策模型, 研究了网络视频独播节目的宣传策略问题。所得结论为视频运营商发布独播新节目时提供了如下管理启示: ①根据结论 1~2, 运营商应评估节目在市场中的羊群效应程度。根据羊群效应程度及宣传策略对用户的影响效果调整节目定价、收费与免费模式的转换时间等市场策略。此外, 运营商还应考虑宣传策略对收费阶段的影响, 并据此调整免费阶段的广告量策略。通过这样的调整, 运营商可以更好地吸引不同类型的目标群体, 从而实现更优的市场表现; ②根据结论 3~5, 在宣传投入资金既定情况下, 运营商应合理规划节目在不同时期的宣传时间和资金分配, 以确保能够获得更好的宣传效果。在制定节目发布后的宣传期及分配节目发布前后的宣传投入资金时, 应考虑羊群效应的程度。若羊群效应偏低, 运营商应将更多的资金投入 to 节目发布前的宣传策略上。在羊群效应非常低的情况下, 运营商甚至无须在节目发布后采取宣传策略。值得注意的是, 运营商在制定节目发布前的宣传期策略时, 无须考虑羊群效应。

随着网络视频产业的迅速发展,独播节目的数量也在不断增加。各大运营商为了吸引用户和提高市场份额,不断推出各种类型的独播节目。本文在这一现实背景下,考虑羊群效应研究了网络视频独播节目的宣传策略,所得结论为网络视频运营商深入理解羊群效应的影响机理并有效实施宣传策略提供了实际启示与指导。

参 考 文 献

- [1] Fan M, Kumar S, Whinston A B. Selling or advertising: strategies for providing digital media online[J]. Journal of Management Information Systems, 2007, 24 (3): 143-166.
- [2] Rong K, Xiao F, Zhang X Y, et al. Platform strategies and user stickiness in the online video industry[J]. Technological Forecasting and Social Change, 2019, 143: 249-259.
- [3] Amaldoss W, Du J Z, Shin W. Media platforms' content provision strategies and sources of profits[J]. Marketing Science, 2021, 40 (3): 527-547.
- [4] Noh S. Dual portfolio management strategies of online subscription video on demand (SVOD) companies: a genre perspective[J]. Journal of Media Business Studies, 2021, 18 (2): 132-153.
- [5] Cheng X Y, Mu L F, Sun Y H, et al. Optimal pricing decisions for the online video platform under customer choice[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2018, 35 (1): 1850002.1-1850002.21.
- [6] 范昊雯, 张玉林. 网络视频运营商广告模式选择研究[J]. 运筹与管理, 2023, 32 (8): 207-213.
- [7] Li J, Gong S Y, Li X. Co-opetitive strategy optimization for online video platforms with multi-homing subscribers and advertisers[J]. Journal of Theoretical and Applied Electronic Commerce Research, 2023, 18 (1): 744-764.
- [8] 王文怡, 石纯来. 社会影响下网络视频平台的自制剧播放策略研究[J]. 信息系统学报, 2022, (2): 114-134.
- [9] 王文怡, 王顺洪, 郭强, 等. 社会影响下网络视频平台的跨期提供策略研究[J]. 管理工程学报, 2021, 35 (6): 128-139.
- [10] 李子庆, 谭德庆. 考虑用户情绪效用情况下的网络视频运营商市场策略研究[J]. 管理评论, 2019, 31 (1): 147-154.
- [11] 李子庆, 谭德庆. 节目试看对网络视频运营商市场策略影响研究[J]. 中国管理科学, 2019, 27 (1): 143-152.
- [12] Kampani J, Nicolaides C. Information consistency as response to pre-launch advertising communications: the case of YouTube trailers[J]. Frontiers in Communication, 2023, 7: 1022139.
- [13] Meng Q G, He Y Y. Prerelease consumer buzz: current state of research and future research ideas[J]. Journal of Sensors, 2022, (1): 2948653.
- [14] Lee Y, Kim S H, Cha K C. Impact of online information on the diffusion of movies: focusing on cultural differences[J]. Journal of Business Research, 2021, 130: 603-609.
- [15] Franses P H. Modeling box office revenues of motion pictures[J]. Technological Forecasting and Social Change, 2021, 169: 120812.
- [16] Rennhoff A D, Wilbur K C. The effectiveness of post-release movie advertising[J]. International Journal of Advertising, 2011, 30 (2): 305-328.
- [17] 孙春华, 刘业政. 电影预告片在线投放对票房的影响: 基于文本情感分析方法[J]. 中国管理科学, 2017, 25 (10): 151-161.
- [18] 张钰琮. 电视节目宣传的有效性分析[J]. 传播力研究, 2019, 3 (9): 48.
- [19] 王京. 电视节目宣传推广创新策略[J]. 电视研究, 2012, (9): 71-73.
- [20] 慕莹. 电视综艺节目宣传中视觉艺术的创新研究[J]. 新闻文化建设, 2022, (11): 121-123.
- [21] Wanidwanan P, Termprasertsakul S. Herd behavior in cryptocurrency market: evidence of network effect[J]. Review of Behavioral Finance, 2024, 16 (3): 406-423.
- [22] Xue W J, He Z Z, Hu Y. The destabilizing effect of mutual fund herding: evidence from China[J]. International Review of Financial Analysis, 2023, 88: 102611.
- [23] 徐浩, 谭德庆, 张敬钦, 等. 群体性突发事件非利益相关者羊群行为的演化博弈分析[J]. 管理评论, 2019, 31 (5):

- 254-266.
- [24] 邵晓双, 谭德庆. 燃油价格波动、羊群效应与私家车厂商市场策略[J]. 管理评论, 2018, 30 (10): 119-127.
- [25] 谭德庆, 吴昊. 网络视频节目中羊群效应的影响研究[J]. 运筹与管理, 2021, 30 (6): 144-149.
- [26] Kennedy A P, Sethi S P, Siu C C, et al. Cooperative advertising in a dynamic three-echelon supply chain[J]. Production and Operations Management, 2021, 30 (11): 3881-3905.
- [27] Machowska D. Delayed effects of cooperative advertising in goodwill dynamics[J]. Operations Research Letters, 2019, 47 (3): 178-184.
- [28] Alaei S, Manavizadeh N, Rabbani M. Solving a two-period cooperative advertising problem using dynamic programming[J]. Interdisciplinary Journal of Management Studies, 2021, 14 (1): 141-161.
- [29] Guo Z B, Ma J H. Dynamics and implications on a cooperative advertising model in the supply chain[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 64: 198-212.
- [30] Liu J, Li C X. Dynamic game analysis on cooperative advertising strategy in a manufacturer-led supply chain with risk aversion[J]. Mathematics, 2023, 11 (3): 512-535.
- [31] Asdemir K, Kumar N, Jacob V S. Pricing models for online advertising: CPM vs. CPC[J]. Information Systems Research, 2012, 23 (3-part-1): 804-822.
- [32] Iris D. Marketers await pricing alternatives to online CPMs[J]. MIN's B2B, 2009, 12 (33): 6.
- [33] Hodges J. CompuServe turns to CPMs[J]. Advertising Age, 1996, (18): 36.
- [34] 谭德庆, 李子庆. 网络视频内容提供模式选择、价格及嵌入广告量研究[J]. 管理评论, 2017, 29 (4): 91-97.
- [35] 李志鹏, 解婷, 陈莎. 口碑效应下网络视频定价与广告投放最优决策[J]. 中国管理科学, 2022, 30 (3): 230-239.
- [36] 邵晓双, 谭德庆. 城市公共交通状况、羊群效应与私家车厂商市场策略[J]. 管理评论, 2017, 29 (1): 220-227.

Research on Promotion Strategies of Online Video Operator's Exclusive Program Considering Herd Effect

WU Hao, TAN Deqing

(School of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract Considering the influence of herd effect and promotion effect on consumer's expected utility, this paper uses the optimal control theory to construct a decision model for the operator's profit maximization problem, and obtains the optimal pricing of paid program, the optimal amount of free advertisement and the optimal intensity of promotion investment. The research shows that the characteristics of the promotion effect on optimal pricing in paid mode are related to the herd effect and further lead to a decrease in the optimal amount of advertising in free mode. In the case of a high herd effect, as the promotion effect increases, the operator is able to increase the profits of a program by extending the duration of the paid mode. Under the constraint of constant total promotion cost, there exists an optimal promotion period strategy and optimal allocation strategy of promotion cost before and after program release. It is also found that the herd effect affects the optimal promotion period strategy after program release and the optimal allocation strategy of the total cost of promotion in the period before and after the release of the program, but the optimal promotion period strategy before the release of the program is not related to herd effect.

Keywords Optimal control theory, Herd effect, Exclusive program, Promotion strategies

作者简介

吴昊（1990—），男，西南交通大学经济管理学院博士研究生，研究方向为决策科学与服务管理。
E-mail: wh900707@126.com。

谭德庆（1966—），男，西南交通大学经济管理学院教授、博士生导师，研究方向为产业组织发展理论、博弈论及其应用。E-mail: tdq1966@126.com。

附 录

结论 1 证明：根据式 (10)，对 $p^*(t)$ 求关于 η 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial p^*(t)}{\partial \eta} = \frac{2\beta_p A^*(t) - (\beta_p - \vartheta) \int_0^t e^{-\frac{(\beta_p - \vartheta)(t-\tau)}{2\beta_p}} A^*(\tau) d\tau}{4\alpha_p \beta_p}$$

令 $\frac{\partial p^*(t)}{\partial \eta} = 0$ ，可得存在临界值 $\vartheta_p^* = \beta_p - \frac{2\beta_p A^*(t)}{\int_0^t e^{-\frac{(\beta_p - \vartheta_p^*)(t-\tau)}{2\beta_p}} A^*(\tau) d\tau}$ 。当 $\vartheta > \vartheta_p^*$ 时， $\frac{\partial p^*(t)}{\partial \eta} > 0$ ；当 $\vartheta < \vartheta_p^*$

时， $\frac{\partial p^*(t)}{\partial \eta} < 0$ 。

根据式 (6)，可得 $\frac{\partial n^*(t)}{\partial x_p^*(t_0)} = \frac{-(\beta_n - \vartheta)}{2\alpha_n} < 0$ 。由式 (10)，易知 $\frac{\partial x_p^*(t_0)}{\partial \eta} > 0$ 。因此，

$$\frac{\partial n^*(t)}{\partial \eta^{-1}(x_p^*(t_0))} = \frac{\partial n^*(t)}{\partial x_p^*(t_0)} \frac{\partial x_p^*(t_0)}{\partial \eta} < 0。综上，结论 1 得证。$$

结论 2 证明：根据式 (10)，在最优定价条件下，令

$$F = p^*(t_0) - \frac{\beta_p (1 - x_p^*(t_0)) + \eta A(t_0) + \vartheta x_p^*(t_0)}{2\alpha_p}$$

根据隐函数求导法，对 t_0 求关于 η 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial t_0}{\partial \eta} = -\frac{\partial F / \partial \eta}{\partial F / \partial t_0} = -\frac{(\beta_p - \vartheta) \int_0^{t_0} e^{-\frac{(\beta_p - \vartheta)(t_0 - \tau)}{2\beta_p}} A^*(\tau) d\tau - 2\beta_p A^*(t_0)}{4\alpha_p \beta_p (\partial F / \partial t_0)}$$

由于上式分母大于零，因此，根据上式分子可知存在临界值 $\vartheta_{t_0}^*$ ，即

$$\vartheta_{t_0}^* = \beta_p - \frac{2\beta_p A^*(t_0)}{\int_0^{t_0} e^{-\frac{(\beta_p - \vartheta_{t_0}^*)(t_0 - \tau)}{2\beta_p}} A^*(\tau) d\tau}$$

当 $\vartheta > \vartheta_{t_0}^*$ 时， $\frac{\partial t_0}{\partial \eta} > 0$ ；当 $\vartheta < \vartheta_{t_0}^*$ 时， $\frac{\partial t_0}{\partial \eta} < 0$ 。综上，结论 2 得证。

结论 3 证明：将式 (6)、式 (10)、式 (14) 及式 (18) 代入目标函数式 (15)，可得

$$\pi^* = \int_0^{t_0} p^*(t) D_p(t) dt + \int_{t_0}^T \kappa n^*(t) D_n(t) dt$$

对 π^* 求关于 Δt 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \Delta t} = \frac{\eta k^*(\tau) y_0}{2\delta \Delta t} \left[(2\delta \Delta t + 1) e^{-\delta \Delta t} - 1 \right]$$

其中，

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{\alpha_p} \int_0^{t_0} D_p(t) f_{p0}(t) dt + \frac{\kappa}{\alpha_n} \int_{t_0}^{t_m} D_n(t) f_{n0}(t) dt \\
&\quad + e^{-\delta t_m} y_2 - \frac{\kappa \beta_n}{2 \alpha_n} \left(z_1 \int_0^{t_0} f_{p0}(t) dt + z_2 \int_{t_0}^{t_m} f_{n0}(t) dt \right) \\
z_1 &= \frac{1}{\beta_p} \left[\int_{t_0}^{t_m} e^{-g_n(t-t_0)} D_n(t) dt + \left(1 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_m} e^{-g_n(t_m-\tau)} d\tau \right) \int_{t_m}^T e^{-\delta(t-t_m)} D_n(t) dt \right] \\
z_2 &= \frac{1}{\beta_n} \int_{t_m}^T e^{-\delta(t-t_m)} D_n(t) dt, \quad g_i = \frac{\beta_i - \mathcal{G}}{2\beta_i}, \quad i = p, n \\
y_2 &= \frac{\kappa}{\alpha_n} \int_{t_m}^T D_n(t) f_m(t) dt, \quad f_{p0}(t) = \dot{F}_{p0}(t) = e^{-\delta t} - g_p \int_0^t e^{-g_p(t-\tau)-\delta\tau} d\tau \\
f_{n0}(t) &= \dot{F}_{n0}(t) = e^{-\delta t} - g_n \int_{t_0}^t e^{-g_n(t-\tau)-\delta\tau} d\tau \\
f_m(t) &= \dot{F}_m(t) = e^{\delta t_m} \left(e^{-\delta t} - g_n \int_{t_m}^t e^{-g_n(t-\tau)-\delta\tau} d\tau \right)
\end{aligned}$$

根据最优化一阶条件, 令 $\frac{\partial \pi^*}{\partial \Delta t} = 0$ 可得满足如下等式的最优 Δt^* 为

$$(2\delta\Delta t^* + 1)e^{-\delta\Delta t^*} = 1 \quad (\text{A.1})$$

下面验证 Δt^* 的存在和唯一性。令 $F_1 = (2\delta\Delta t^* + 1)e^{-\delta\Delta t^*} - 1$, 对 F_1 求关于 Δt^* 的一阶导数, 可得 $\frac{\partial F_1}{\partial \Delta t^*} = (1 - 2\delta\Delta t^*)\delta e^{-\delta\Delta t^*}$ 。易知当 $2\delta\Delta t^* < 1$ 时, $\frac{\partial F_1}{\partial \Delta t^*} > 0$; 当 $2\delta\Delta t^* > 1$ 时, $\frac{\partial F_1}{\partial \Delta t^*} < 0$ 。将 $2\delta\Delta t^* = 1$ 代入 F_1 , 可得 $F_1 > 0$ 。因此, 在满足式 (A.1) 条件下, 有 $2\delta\Delta t^* < 1$, 即 $\frac{\partial F_1}{\partial \Delta t^*} > 0$ 。因此, Δt^* 的存在和唯一性成立。

由式 (A.1) 易知, $\frac{\partial \Delta t^*}{\partial \mathcal{G}} = 0$ 。综上, 结论 3 得证。

结论 4 证明: 在 $\Delta t = \Delta t^*$ 条件下, 对 π^* 求关于 χ 的一阶导数, 可得

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \chi} \Big|_{\Delta t = \Delta t^*} = \frac{\eta C}{2} \left(\frac{y_0 \int_{-\Delta t^*}^0 e^{\delta\tau} d\tau}{k^*(\tau)\Delta t^*} - \frac{y_1 + y_2 \int_0^{t_m} e^{-\delta(t_m-\tau)} d\tau}{k^*(t)t_m} \right) \quad (\text{A.2})$$

其中,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{\alpha_p} \int_0^{t_0} D_p(t) f_{p1}(t) dt + \frac{\kappa}{\alpha_n} \int_{t_0}^{t_m} D_n(t) f_{n1}(t) dt \\
&\quad + y_2 - \frac{\kappa \beta_n}{2 \alpha_n} \left(z_1 \int_0^{t_0} f_{p1}(t) dt + z_2 \int_{t_0}^{t_m} f_{n1}(t) dt \right) \\
f_{p1}(t) &= \dot{F}_{p1}(t) = \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} d\tau - g_p \int_0^t e^{-g_p(t-\tau)} \left(\int_0^\tau e^{-\delta(\tau-\tau_1)} d\tau_1 \right) d\tau \\
f_{n1}(t) &= \dot{F}_{n1}(t) = \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} d\tau - g_n \int_{t_0}^t e^{-g_n(t-\tau)} \left(\int_0^\tau e^{-\delta(\tau-\tau_1)} d\tau_1 \right) d\tau
\end{aligned}$$

根据最优化一阶条件, 令 $\frac{\partial \pi^*}{\partial \chi} \Big|_{\Delta t = \Delta t^*} = 0$ 可得满足如下等式的最优 χ^* 为

$$\chi^* = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t^* [\delta y_1 + y_2(1 - e^{-\delta t_m})]^2}{t_m y_0^2 (1 - e^{-\delta \Delta t^*})^2}} \quad (\text{A.3})$$

由式 (A.2), 令 $F_2 = \frac{y_0 \int_{-\Delta t^*}^0 e^{\delta \tau} d\tau}{\Delta t^* k^*(\tau)} - \frac{y_1 + y_2 \int_0^{t_m} e^{-\delta(t_m - \tau)} d\tau}{k^*(t) t_m}$, 对 F_2 求关于 χ 的一阶导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \chi} = & - \left[\frac{(y_1 + y_2 \int_0^{t_m} e^{-\delta(t_m - \tau)} d\tau) C}{2k^{*2}(t) t_m} + \frac{\partial y_1}{\partial \chi} + \frac{\partial y_2}{\partial \chi} \int_0^{t_m} e^{-\delta(t_m - \tau)} d\tau \right] \frac{1}{t_m k^*(t)} \\ & - \left(\frac{y_0 C}{2\Delta t^* k^{*2}(\tau)} - \frac{\partial y_0}{\partial \chi} \right) \frac{\int_{-\Delta t^*}^0 e^{\delta \tau} d\tau}{\Delta t^* k^*(\tau)} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

根据最优解 $k^*(\tau)$ 和 $k^*(t)$ 可知, y_0 是关于 $k^*(\tau)$ 和 $k^*(t)$ 的一次函数形式, 不妨设 $y_0 = l + \eta k^*(\tau) l_0 + \eta k^*(t) l_1$, 其中 l 、 l_0 及 l_1 为待定系数且均大于零。对 y_0 求关于 χ 的一阶导数, 可得 $\frac{\partial y_0}{\partial \chi} = \eta C \left(\frac{l_0}{2k^*(\tau) \Delta t^*} - \frac{l_1}{2k^*(t) t_m} \right)$, 将其代入式 (A.4) $\left(\frac{y_0 C}{2\Delta t^* k^{*2}(\tau)} - \frac{\partial y_0}{\partial \chi} \right)$ 项, 可得 $\left(\frac{y_0 C}{2\Delta t^* k^{*2}(\tau)} - \frac{\partial y_0}{\partial \chi} \right) = \frac{C(y_0 - l_0 \eta k^*(\tau))}{2k^{*2}(\tau) \Delta t^*} + \frac{l_1 \eta C}{2k^*(t) t_m}$ 。由于 $y_0 > l_0 \eta k^*(\tau)$, 因此 $\left(\frac{y_0 C}{2\Delta t^* k^{*2}(\tau)} - \frac{\partial y_0}{\partial \chi} \right) > 0$ 。同理可证 $\frac{(y_1 + y_2 \int_0^{t_m} e^{-\delta(t_m - \tau)} d\tau) C}{2k^{*2}(t) t_m} + \frac{\partial y_1}{\partial \chi} + \frac{\partial y_2}{\partial \chi} \int_0^{t_m} e^{-\delta(t_m - \tau)} d\tau > 0$ 。因此 $\frac{\partial F_2}{\partial \chi} < 0$ 。综上, χ^* 的存在和唯一性成立。

根据式 (A.3), 令 $\frac{\Delta t^* [\delta y_1 + y_2(1 - e^{-\delta t_m})]^2}{t_m y_0^2 (1 - e^{-\delta \Delta t^*})^2} = 1$, 整理后可得存在临界值

$$g_\chi^* = \frac{m_0(1 - e^{-\delta \Delta t^*}) \sqrt{t_m / \Delta t^*} - n_0 \delta - v_0(1 - e^{-\delta t_m})}{n_1 \delta + v_1(1 - e^{-\delta t_m}) - m_1(1 - e^{-\delta \Delta t^*}) \sqrt{t_m / \Delta t^*}}, \text{ 其中}$$

$$\begin{aligned} m_0 = & \int_0^{t_0} \left(\frac{D_p(t)}{\alpha_p} - \frac{z_1 \kappa \beta_n}{2\alpha_n} \right) \left(e^{-\delta t} - \frac{F_{p0}(t)}{2} \right) dt \\ & + \frac{\kappa}{\alpha_n} \int_{t_0}^{t_m} \left(D_n(t) - \frac{z_2 \beta_n}{2} \right) \left(e^{-\delta t} - \frac{F_{n0}(t)}{2} \right) dt \\ & + \frac{\kappa}{\alpha_n} \int_{t_m}^T D_n(t) \left(e^{-\delta t} - \frac{e^{-\delta t_m} F_m(t)}{2\alpha} \right) dt \\ m_1 = & \frac{1}{2\beta_p} \int_0^{t_0} F_{p0}(t) \left(\frac{D_p(t)}{\alpha_p} - \frac{z_1 \kappa \beta_n}{2\alpha_n} \right) dt \\ & + \frac{\kappa}{2\beta_n \alpha_n} \left[\int_{t_0}^{t_m} F_{n0}(t) \left(D_n(t) - \frac{z_2 \beta_n}{2} \right) dt + e^{-\delta t_m} \int_{t_m}^T D_n(t) F_m(t) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_0 &= \int_0^{t_0} \left(\frac{D_p(t)}{\alpha_p} - \frac{z_1 \kappa \beta_n}{2\alpha_n} \right) \left(\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} d\tau - \frac{F_{p1}(t)}{2} \right) dt \\
&\quad + \frac{\kappa}{\alpha_n} \int_{t_0}^{t_m} \left(D_n(t) - \frac{z_2 \beta_n}{2} \right) \left(\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} d\tau - \frac{F_{n1}(t)}{2} \right) dt \\
&\quad + \frac{\kappa}{\alpha_n} \int_{t_m}^T D_n(t) \left(e^{-\delta(t-t_m)} - \frac{F_m(t)}{2} \right) dt \\
n_1 &= \frac{1}{2\beta_p} \int_0^{t_0} F_{p1}(t) \left(\frac{D_p(t)}{\alpha_p} - \frac{z_1 \kappa \beta_n}{2\alpha_n} \right) dt \\
&\quad + \frac{\kappa}{2\beta_n \alpha_n} \left[\int_{t_0}^{t_m} F_{n1}(t) \left(D_n(t) - \frac{z_2 \beta_n}{2} \right) dt + \int_{t_m}^T D_n(t) F_m(t) dt \right] \\
v_0 &= \frac{\kappa}{\alpha_n} \int_{t_m}^T D_n(t) \left(e^{-\delta(t-t_m)} - \frac{F_m(t)}{2} \right) dt, \quad v_1 = \frac{\kappa}{2\beta_n \alpha_n} \int_{t_m}^T D_n(t) F_m(t) dt
\end{aligned}$$

当 $\vartheta < \vartheta_\chi^*$ 时, $\chi^* > \frac{1}{2}$; 当 $\vartheta > \vartheta_\chi^*$ 时, $\chi^* < \frac{1}{2}$ 。综上, 结论 4 得证。

结论 5 证明: 在满足以上最优条件下, 继续对 π^* 求关于 t_m 的一阶导数, 可得

$$\left. \frac{\partial \pi^*}{\partial t_m} \right|_{\substack{\Delta t = \Delta t^* \\ \chi = \chi^*}} = \frac{\eta k^*(t)}{2\delta t_m} \left\{ y_2 \left[(2\delta t_m + 1)e^{-\delta t_m} - 1 \right] - \delta y_1 \right\}$$

根据最优化一阶条件, 令 $\left. \frac{\partial \pi^*}{\partial t_m} \right|_{\substack{\Delta t = \Delta t^* \\ \chi = \chi^*}} = 0$ 可得满足如下等式的最优 t_m^* 为

$$2\delta t_m^* y_2 e^{-\delta t_m^*} = \delta y_1 + y_2 (1 - e^{-\delta t_m^*}) \quad (\text{A.5})$$

t_m^* 存在和唯一性的证明与 Δt^* 类似, 因此不再赘述。

根据式 (A.5), 设 $F_3 = y_2 \left[(2\delta t_m^* + 1)e^{-\delta t_m^*} - 1 \right] - \delta y_1$, 令 $F_3 = 0$, 整理后可得存在临界值

$$\vartheta_{t_m}^* = \frac{\delta n_0 - v_0 \left[(2\delta t_m^* + 1)e^{-\delta t_m^*} - 1 \right]}{v_1 \left[(2\delta t_m^* + 1)e^{-\delta t_m^*} - 1 \right] - \delta n_1}, \text{ 当 } \vartheta < \vartheta_{t_m}^* \text{ 时, } F_3 < 0, \text{ 则有 } \frac{\partial \pi^*}{\partial t_m} < 0, \text{ 因此 } t_m^* = 0. \text{ 将 } t_m^* \text{ 代入式 (A.3),}$$

可得 $\chi^* = 1$, 这也说明了 $\vartheta_{t_m}^* \leq \vartheta_\chi^*$; 反之, 当 $\vartheta > \vartheta_{t_m}^*$ 时, $F_3 > 0$, 则有 $\frac{\partial \pi^*}{\partial t_m} > 0$, 因此 $t_m^* = T$ 。综上,

结论 5 得证。