不同首播权下劣势网络视频运营商的节目播出模式与宣传策略*

吴昊　谭德庆

（西南交通大学经济管理学院，四川 成都 610031）

摘　要　本文在不同首播权情形下，通过构建劣势运营商与优势运营商微分博弈模型，分析了劣势运营商的节目最优播出模式和宣传策略。研究表明：劣势运营商应根据用户对节目收费定价的敏感度决策最优播出模式；进一步得到了劣势运营商节目推出前后的最优宣传时间和宣传投入；劣势运营商在未取得首播权情形下，节目推出前的宣传时间应随着溢出效应的增加而缩短，且节目推出前的宣传时间应比取得首播权情形下节目推出前的宣传时间要短。

关键词　微分博弈，网络视频平台，播出模式，宣传期

中图分类号　F272.3

1　引言

根据中国互联网络信息中心（China Internet Network Information Center，CNNIC）发布的第 51 次中国互联网络发展状况统计报告①，截至 2022 年 12 月，我国网络视频（含短视频）用户规模达 10.31 亿，占网民总体的 96.5%，观看网络视频节目已成为广大网民重要的休闲娱乐活动。在此背景下，涌现出了大量的网络视频节目平台，加剧了视频运营商争夺用户的竞争。由于不同运营商配备的网络技术和给节目分配的带宽等存在差异，在此节目声音效果和观看节目清晰度不同，尤其是分配的低带宽节目在播放过程中常出现卡顿等现象致使节目体验效果更差。基于这些原因，各网络视频运营商为了让更多用户观看本平台推出的新节目，从节目观看模式、节目播出前后期宣传等方面展开策略竞争。根据《2021 中国网络视听发展研究报告》②，以“爱奇艺”“优酷”“腾讯”“芒果 TV”为代表的视频平台占据了近九成市场份额。由于观看节目的用户越多意味着视频运营商能够获得越高的收益，因此对于节目体验感一般的劣势运营商，在未取得和取得节目首播权的不同情形下，如何利用节目播放模式策略、节目播放前后期的宣传策略争取更多用户显得尤为重要。

对于视频运营商，新节目推出模式、收费模式定价以及免费模式中嵌入广告量由于对节目产生的效益具有较大影响，因此是运营商的核心问题。由此，目前围绕视频运营商对节目的推出模式和收费模式定价、免费模式中嵌入广告量、节目试看策略以及外部性因素对市场策略的影响等进行研究的成果

* 基金项目：国家自然科学基金资助项目（71571149），成都市软科学研究项目（2020RK00-00179-ZF）。

通信作者：谭德庆，西南交通大学经济管理学院，教授、博士生导师。E-mail：tdq1966@126.com。

① https://cnnic.cn/NMediaFile/2023/0322/MAIN16794576367190GBA2HA1KQ.pdf。

② https://news.znds.com/article/54323.html。

较多，如 Kumar 和 Sethi[1]通过构建决策模型，分析了垄断网络平台内容的最优提供模式；Cheng 等[2]基于消费者效用理论，通过构建两阶段决策模型探讨了垄断视频运营商节目收费模式的最优定价和免费模式的最优嵌入广告量；Xu 和 Ling[3]引入宽带成本因素，通过建立决策模型研究了垄断视频运营商的节目最优播出模式；由于收费模式的节目定价和免费模式的广告量具有随时间变化特征，李稚和谭德庆[4]、Li 和 Tan[5]通过建立连续时间的决策模型，研究了垄断视频运营商节目收费最优动态定价和免费最优动态嵌入广告量；也有学者根据视频运营商具有的双边市场特征，Chiang 和 Jhang-Li[6]、张诗纯和陈靖[7]与李志鹏和周晓宇[8]在不同产业链的结构下，通过建立决策模型研究了视频运营商的相关最优决策；部分学者[9-12]针对国内网络视频运营现状，通过建立两阶段垄断决策模型和博弈模型探讨了运营商的节目独播、同步播和首播不同情况下的节目收费定价、免费嵌入广告量和节目最优播出模式，并探究了节目试看对运营商市场策略的影响；de Matos 和 Ferreira[13]通过实证分析发现节目策略性试看会导致视频运营商利润的减少；谭德庆和吴昊[14]构建连续时间的决策模型研究羊群效应对垄断视频运营商的节目收费模式定价和免费模式嵌入广告量以及免费模式推出时间的影响；李志鹏等[15]在考虑节目的用户口碑情况下，通过构建决策模型分析了垄断视频平台节目收费模式定价与免费模式的最优嵌入广告量；王文怡等[16]通过构建决策模型讨论了社会影响下垄断视频运营商的节目收费模式定价和免费模式中嵌入广告量。

除了以上学者通过建立静态模型、两阶段和连续时间模型研究视频运营商的新节目推出模式、收费模式定价以及免费模式中嵌入广告量等问题外，由于节目宣传对吸引用户观看节目具有较大影响，因此部分学者也研究节目的广告宣传策略。但通过查阅文献，发现关于节目宣传的研究成果主要聚焦于电影和传统电视节目的广告宣传。例如，Elberse 和 Eliashberg[17]通过研究发现电影上映之前的广告宣传对电影首映阶段票房具有较大影响；Ehrenberg[18]分析了电影预告片对消费者的影响机理，发现预先重复投放宣传广告能够提高那些因缺乏足够信息而无法做出消费决策的消费者对电影的认识和了解，从而实现电影票房的提升；Karray 和 Debernitz[19]分析了预告片宣传的有效性，发现更早投放预告片会对电影票房产生积极影响；Finsterwalder 等[20]探讨了电影预告片风格、曝光的影片内容等因素对消费者的电影关注度和电影票房的影响；Hixson[21]研究发现，相比于网站和海报等电影宣传方式，预告片宣传是最有效的电影宣传手段，对消费者观看电影的行为影响最大；Rennhoff 和 Wilbur[22]研究了电影上映后广告宣传的有效性，并发现进行广告宣传同时延长影片放映周期对提高票房更有效；孙春华和刘业政[23]研究发现电影预告片提前投放和密集投放能够提高影片营销效果，并且影片上映后继续投放仍对票房具有促进作用；Trehan 和 Maan[24]研究发现电视节目的提前宣传能够激发消费者对电视节目的兴趣，从而促进消费者参与节目的意愿。

通过现有研究看，有关视频运营商在垄断和竞争情况下的节目收费模式定价、免费模式的嵌入广告量以及节目试看、羊群效应等对收费模式定价、免费模式嵌入广告量影响的研究成果较多，但免费模式的推出时间策略以及节目在播出前后的宣传策略研究目前尚未见到。而在实践中，视频运营商为获得先入为主的市场优势，通常会争夺新节目的首播权。因此，在不同首播权情形下，节目播出效果具有劣势的视频运营商如何运用免费模式的推出时间、节目播出的前后宣传期及宣传投入的分配比例等策略来更有效地与优势运营商争夺节目用户量是值得研究的问题。由于本文研究的节目宣传时间、连续投入强度及免费模式的推出时间点等与时间相关，因此，借鉴相关研究文献[18，24-28]，本文将运用具有时间连续特点的微分博弈理论对上述问题进行分析。

2 基本假设

目前，视频节目分为收费和免费两种模式。收费模式又细分为单节目收费形式和会员制收费形式，单节目收费形式是指无论用户是否为平台会员，均要付费点播观看。本文以单独收费形式为研究对象，研究问题前做如下基本假设。

（1）假设运营商 i（$i=l$ 为劣势运营商，$i=h$ 为优势运营商）在 0 时刻取得了某一节目的首播权，另一运营商在 t_0 时刻取得了该节目的播放权且 $t_0>0$。

实际中，运营商采用收费模式播放的节目通常比采用免费模式播放的节目清晰度和声音效果更好、配备的宽带更高，同时在节目播放过程中不插入任何广告，这使得收费模式播放的节目更加流畅，用户体验效果更好。而免费模式播放的节目，运营商通常在节目中插入广告，从而破坏了用户观看节目的连续性。因此，免费模式观看节目的体验效果会低于收费模式观看节目的体验效果。由此，做如下假设。

（2）假设运营商 i 采用收费模式的节目体验质量为 β_{ip} 且 $\beta_{hp}>\beta_{lp}$，在 t 时刻的节目定价为 $p_i(t)$；采用免费模式的节目体验质量为 β_{in} 且 $\beta_{hn}>\beta_{ln}$，在 t 时刻免费模式中嵌入的广告量为 $n_i(t)$。

在实践中，根据视频运营商推出一个新节目通常先采用收费模式，后推出免费模式的特点，做如下假设。

（3）由于取得首播权的运营商在首播期间处于垄断地位，因此通常不会在首播期间推出免费模式，只有在竞争对手获得播放权后，运营商为了争夺用户会考虑何时推出免费模式。同时借鉴已有文献[11]，假设取得首播权的运营商 i 在对手 t_0 时刻获得播放权后的 t_i 时刻推出免费模式，即有 $t_i>t_0$。

（4）由于视频运营商在新节目推出前后均会进行节目宣传，因此可假设运营商 i 在节目推出前的宣传时长为 Δt_{ia}，节目推出后的宣传时长为 Δt_{ib}。

（5）借鉴已有文献的研究[25, 26]，任何时刻的宣传投入强度随时间具有衰减特征，同时之前的所有宣传投入强度也具有累积效应。因此，假设运营商 i 在 t 时刻之前 τ 时间点对节目的宣传投入强度为 $s_i(\tau)$，并在 t 时刻衰减为 $\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}s_i(\tau)$，其中 $\delta>0$ 为衰减因子，则在 t 时刻前宣传投入强度产生的累积效应为 $A_i(t)=\int_{t-\Delta t_i}^{t}\mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}s_i(\tau)\mathrm{d}\tau$。

（6）假设运营商 i 的节目宣传投入预算为 C_i，并且节目推出前的宣传投入占总预算的比例为 λ_i，$\lambda_i\in[0,1]$。参考 Jørgensen 等[27, 28]研究，边际投入强度与投入成本具有二次函数特征，因此可假设宣传投入强度与投入成本的关系为 $\int\limits_{\Delta t_{ia}+\Delta t_{ib}} s_i^2(\tau)\mathrm{d}\tau=C_i$。

（7）目前视频运营商在免费播出节目中嵌入广告的计费方式通常是采用 CPM（cost per mille，每千次展示成本）计费方式，即视频运营商根据每千人为单位的用户对该节目的点击量向投放广告的企业收费。因此，本文以 CPM 计费方式核算运营商的广告收入，在不影响分析性质特征情况下，假设单位用户点击该节目的广告费为 κ_i。

（8）由于不同用户对同一视频节目的体验质量具有异质性，因此可假设对于质量为 β 的节目，θ 类型用户的实际体验质量为 $\theta\beta$，借鉴相关研究文献[8-12]，假设用户均匀分布于 $[0,1]$。

文中所用符号及含义如表 1 所示。

表 1 符号及含义

符号	含义
i	$i=h$ 表示优势运营商，$i=l$ 表示劣势运营商
α_p	用户对节目收费价格的敏感度
$p_i(t)$	运营商 i 在 t 时刻的节目定价
α_n	用户对免费播出节目中嵌入广告量的敏感度
$n_i(t)$	运营商 i 在 t 时刻免费模式中嵌入的广告量
β_{ip}/β_{in}	运营商 i 在收费/免费模式下的节目体验质量
t_0	首播期
t_h	优势运营商的免费模式推出时间
t_{al}	劣势运营商早于优势运营商推出免费模式的节目推出时间，即 $t_{al}<t_h$
t_{dl}	劣势运营商不早于优势运营商推出免费模式的节目推出时间，即 $t_{dl}\geqslant t_h$
η	宣传累积效应对用户预期效用的影响系数
ε_i	运营商 i 溢出效应对用户预期效用的影响系数
Δt_{ia}	运营商 i 在节目推出前的宣传时长
Δt_{ib}	运营商 i 在节目推出后的宣传时长
$s_i(\tau)$	运营商 i 在 τ 时刻对节目的宣传投入强度
C_i	运营商 i 对节目的宣传投入预算
δ	宣传投入强度的衰减因子
θ	用户类型
λ_i	运营商 i 在节目推出前的宣传投入占总预算的比例
κ_i	运营商 i 每单位免费观看节目用户向广告商收取的广告费
$D_{ip}(t)/D_{in}(t)$	运营商 i 在 t 时刻付费/免费观看节目的用户量
$D_i(t)$	运营商 i 在 t 时刻观看节目的用户量，即 $D_i(t)=D_{ip}(t)+D_{in}(t)$
$D(t)$	在 t 时刻观看节目的总用户量，即 $D(t)=D_h(t)+D_l(t)$
$x_{ip}(t)/x_{in}(t)$	运营商 i 在 t 时刻前已付费/免费观看节目的累积用户量
$x_i(t)$	运营商 i 在 t 时刻前已观看节目的累积用户量，即 $x_i(t)=x_{ip}(t)+x_{in}(t)$
$x(t)$	在 t 时刻前已观看节目的累积用户量，即 $x(t)=x_h(t)+x_l(t)$

根据以上基本假设，可对各运营商在不同阶段的决策过程做如下描述：对于取得首播权的运营商 i，在 $[-\Delta t_{ia},0]$ 和 $[0,\Delta t_{ib}]$ 阶段决定 $s_i(t)$，在 $[0,t_0]$ 阶段决定 $p_i(t)$。对于未取得首播权的另一运营商 $j(j\neq i)$，在 $[t_0-\Delta t_{ja},t_0]$ 和 $[t_0,t_0+\Delta t_{jb}]$ 阶段决定 $s_j(t)$。劣势运营商若提前推出免费模式，则在 $[t_0,t_{al}]$ 阶段，优势运营商决定 $p_h(t)$，劣势运营商决定 $p_l(t)$；在 $[t_{al},t_h]$ 阶段，优势运营商决定 $p_h(t)$，劣势运营

商决定 $p_l(t)$ 和 $n_l(t)$；在 t_h 点之后，优势运营商决定 $p_h(t)$ 和 $n_h(t)$，劣势运营商决定 $p_l(t)$ 和 $n_l(t)$。劣势运营商若不提前推出免费模式，则在 $[t_0,t_h]$ 阶段，优势运营商决定 $p_h(t)$，劣势运营商决定 $p_l(t)$；在 $[t_h,t_{dl}]$ 阶段，优势运营商决定 $p_h(t)$ 和 $n_h(t)$，劣势运营商决定 $p_l(t)$；在 t_{dl} 点之后，优势运营商决定 $p_h(t)$ 和 $n_h(t)$，劣势运营商决定 $p_l(t)$ 和 $n_l(t)$。各运营商的决策顺序如图 1 所示。

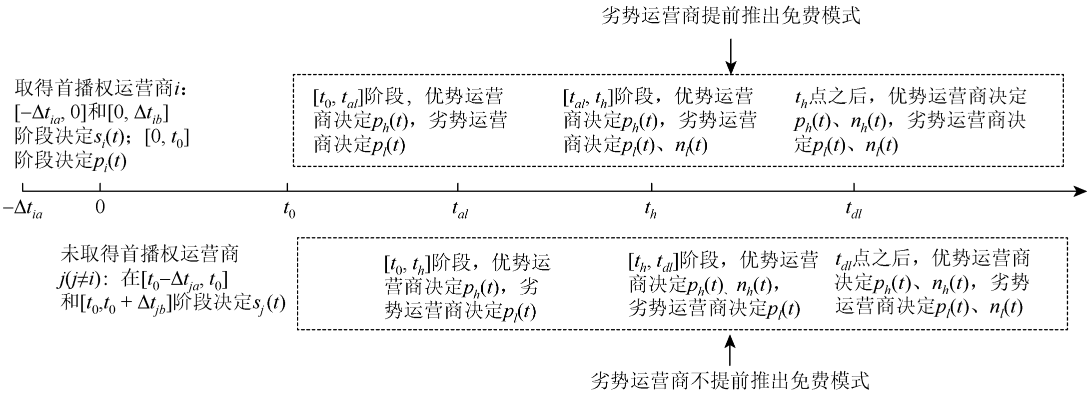

图 1　各运营商的决策顺序

3　动态需求分析

下面分别在优势运营商取得节目首播权和劣势运营商取得节目首播权的不同情景下进行节目动态需求分析。

3.1　优势运营商取得首播权（情形 S）

优势运营商在节目首播期间，假设 t 时刻未观看该节目的用户分布于 $[0,\theta(t)]$，$\theta(t)=1-x_h(t)$，其中 $x_h(t)$ 为优势运营商节目首播阶段收费模式中 t 时刻前的累积用户量。由于运营商进行节目宣传产生的累积效应通常会提高用户对节目的预期效用，并且两个运营商均对同一节目进行宣传时，宣传效果一般具有正向的网络外部性特征（也称为溢出效应）。为此，借鉴已有研究文献[26, 29, 30]，假设类型为 $\theta(t)$ 的用户在 t 时刻付费观看优势运营商播出该节目获得的预期效用为 $U_{hp}=\theta(t)\beta_{hp}-\alpha_p p_h(t)+f_h(t)$，其中 $f_h(t)=\eta A_h(t)+\varepsilon_l A_l(t)$，$\alpha_p>0$ 为用户对该节目收费价格的敏感度，$\eta>0$ 为宣传累积效应对用户预期效用的影响系数，ε_l 为劣势运营商的宣传溢出效应对用户预期效用的影响系数，实际中，宣传累积效应对用户预期效用的影响系数通常大于宣传溢出效应对用户预期效用的影响系数，同时根据文献[29-31]，因此有 $0<\varepsilon_l<\eta$。在首播期间劣势运营商未进行节目宣传前有 $A_l(t)=0$，当 $U_{hp}>0$ 时，用户会选择优势运营商付费观看该节目。令 $U_{hp}=0$，可得用户选择优势运营商付费观看与选择不观看该节目的效用无差异点为 $\theta_{h0}^*(t)=\dfrac{\alpha_p p_h(t)-f_h(t)}{\beta_{hp}}$，则在首播阶段任意 t 时刻，优势运营商付费观看该节目的用户量为

$$D_{hp}(t)=\int_{\theta_1^*(t)}^{\theta(t)}\mathrm{d}\theta=\theta(t)-\theta_{h0}^*(t) \tag{1}$$

劣势运营商在 t_0 时刻取得了该节目的播放权后，类型为 $\theta(t)$ 的用户在 t 时刻付费观看劣势运营商播出该节目获得的预期效用为 $U_{lp}=\theta(t)\beta_{lp}-\alpha_p p_l(t)+f_l(t)$，其中 $f_l(t)=\eta A_l(t)+\varepsilon_h A_h(t)$。若 $U_{hp}>U_{lp}$ 且

$U_{hp} \geqslant 0$，用户会选择优势运营商付费观看该节目；若$U_{lp} > U_{hp}$且$U_{lp} \geqslant 0$，用户会选择劣势运营商付费观看该节目。令$U_{hp} = U_{lp}$，可得用户选择优势运营商付费观看与选择劣势运营商付费观看该节目的效用无差异点为$\theta_1^*(t) = \dfrac{\alpha_p p_h(t) - \alpha_p p_l(t) + f_l(t) - f_h(t)}{\beta_{hp} - \beta_{lp}}$；令$U_{lp} = 0$，可得用户选择劣势运营商付费观看与选择不观看该节目的效用无差异点为$\theta_2^*(t) = \dfrac{\alpha_p p_l(t) - f_l(t)}{\beta_{lp}}$。因此，在该阶段任意$t$时刻，优势运营商和劣势运营商付费观看该节目的用户量分别为

$$\begin{cases} D_{hp}(t) = \int_{\theta_1^*(t)}^{1-x(t)} \mathrm{d}\theta = 1 - x(t) - \theta_1^*(t) \\ D_{lp}(t) = \int_{\theta_2^*(t)}^{\theta_1^*(t)} \mathrm{d}\theta = \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t) \end{cases} \tag{2}$$

其中，$x(t) = x_h(t) + x_l(t)$，$x_i(t)$为t时刻前运营商i已观看该节目的累积用户量。

以优势运营商免费模式推出时间t_h为参照点，劣势运营商可以选择早于t_h点推出免费模式（即$t_l = t_{al} < t_h$），也可以选择不早于t_h点推出免费模式（即$t_l = t_{dl} \geqslant t_h$）。因此，下文对劣势运营商推出免费模式的不同情况进行讨论。

3.1.1 劣势运营商提前推出免费模式情况

劣势运营商在t_{al}时刻推出免费模式后（即$t_{al} < t_h$），类型为$\theta(t)$的用户在t时刻免费观看劣势运营商播出该节目获得的预期效用为$U_{ln} = \theta(t)\beta_{ln} - \alpha_n n_l(t) + f_l(t)$，其中$\alpha_n > 0$为用户对免费播出节目中嵌入广告量的敏感度。若$U_{ln} > U_{lp}$且$U_{ln} \geqslant 0$，用户会选择劣势运营商免费观看该节目。令$U_{lp} = U_{ln}$，可得用户选择劣势运营商付费观看与选择免费观看该节目的效用无差异点为$\theta_3^*(t) = \dfrac{\alpha_p p_l(t) - \alpha_n n_l(t)}{\beta_{lp} - \beta_{ln}}$；令$U_{ln} = 0$，可得用户选择劣势运营商免费观看与选择不观看该节目的效用无差异点为$\theta_4^*(t) = \dfrac{\alpha_n n_l(t) - f_l(t)}{\beta_{ln}}$。则在该阶段任意$t$时刻，优势运营商付费观看以及劣势运营商付费和免费观看该节目的用户量分别为

$$\begin{cases} D_{hp}(t) = \int_{\theta_1^*(t)}^{1-x(t)} \mathrm{d}\theta = 1 - x(t) - \theta_1^*(t) \\ D_{lp}(t) = \int_{\theta_3^*(t)}^{\theta_1^*(t)} \mathrm{d}\theta = \theta_1^*(t) - \theta_3^*(t) \\ D_{ln}(t) = \int_{\theta_4^*(t)}^{\theta_3^*(t)} \mathrm{d}\theta = \theta_3^*(t) - \theta_4^*(t) \end{cases} \tag{3}$$

优势运营商在t_h时刻推出免费模式后，类型为$\theta(t)$的用户在t时刻选择免费观看优势运营商播出该节目获得的预期效用为$U_{hn} = \theta(t)\beta_{hn} - \alpha_n n_h(t) + f_h(t)$。若$U_{hn} > U_{lp}$且$U_{hn} \geqslant 0$，用户会选择优势运营商免费观看该节目；若$U_{ln} > U_{hn}$且$U_{ln} \geqslant 0$，用户会选择劣势运营商免费观看该节目。令$U_{hn} = U_{lp}$，可得用户选择劣势运营商付费观看与选择优势运营商免费观看该节目的效用无差异点为$\theta_5^*(t) = \dfrac{\alpha_n n_h(t) - \alpha_p p_l(t) - f_h(t) + f_l(t)}{\beta_{hn} - \beta_{lp}}$；令$U_{hn} = U_{ln}$，可得用户选择优势运营商免费观看与选择劣势运营商免费观看该节目的效用无差异点为$\theta_6^*(t) = \dfrac{\alpha_n (n_h(t) - n_l(t)) + f_l(t) - f_h(t)}{\beta_{hn} - \beta_{ln}}$。则在该阶段任意$t$时刻，优势运营商与劣势运营商付费和免费观看该节目的用户量分别为

$$\begin{cases} D_{hp}(t)=\int_{\theta_1^*(t)}^{1-x(t)}\mathrm{d}\theta=1-x(t)-\theta_1^*(t) \\ D_{hn}(t)=\int_{\theta_6^*(t)}^{\theta_5^*(t)}\mathrm{d}\theta=\theta_5^*(t)-\theta_6^*(t) \\ D_{lp}(t)=\int_{\theta_5^*(t)}^{\theta_1^*(t)}\mathrm{d}\theta=\theta_1^*(t)-\theta_5^*(t) \\ D_{ln}(t)=\int_{\theta_4^*(t)}^{\theta_6^*(t)}\mathrm{d}\theta=\theta_6^*(t)-\theta_4^*(t) \end{cases} \tag{4}$$

3.1.2 劣势运营商不提前推出免费模式情况

优势运营商在 t_h 时刻推出免费模式后，若 $U_{hn}>U_{lp}$ 且 $U_{hn}\geqslant 0$，用户会选择优势运营商免费观看该节目。令 $U_{hn}=0$，可得用户选择优势运营商免费观看与选择不观看该节目的效用无差异点为 $\theta_7^*(t)=\dfrac{\alpha_n n_h(t)-f_h(t)}{\beta_{hn}}$。因此，在该阶段任意 t 时刻，优势运营商付费和免费观看以及劣势运营商付费观看该节目的用户量分别为

$$\begin{cases} D_{hp}(t)=\int_{\theta_1^*(t)}^{1-x(t)}\mathrm{d}\theta=1-x(t)-\theta_1^*(t) \\ D_{hn}(t)=\int_{\theta_7^*(t)}^{\theta_5^*(t)}\mathrm{d}\theta=\theta_5^*(t)-\theta_7^*(t) \\ D_{lp}(t)=\int_{\theta_5^*(t)}^{\theta_1^*(t)}\mathrm{d}\theta=\theta_1^*(t)-\theta_5^*(t) \end{cases} \tag{5}$$

劣势运营商在 t_{dl} 时刻推出免费模式后（即 $t_{dl}\geqslant t_h$），同理 3.1.1 节，可得在该阶段任意 t 时刻，优势运营商与劣势运营商付费和免费观看该节目的用户量表达式同式（4）。

3.2 劣势运营商取得首播权（情形 I）

劣势运营商在节目首播期间，假设 t 时刻未观看该节目用户分布于 $[0,\theta(t)]$，$\theta(t)=1-x_l(t)$，其中 $x_l(t)$ 为劣势运营商节目首播阶段收费模式中 t 时刻前的累积用户量。类型为 $\theta(t)$ 的用户在 t 时刻付费观看劣势运营商播出该节目获得的预期效用为 $U_{lp}=\theta(t)\beta_{lp}-\alpha_p p_l(t)+f_l(t)$。在首播期间优势运营商未进行节目宣传前有 $A_h(t)=0$。令 $U_{lp}=0$，可得用户选择劣势运营商付费观看与不观看该节目的效用无差异点为 $\theta_{l0}^*(t)=\dfrac{\alpha_p p_l(t)-f_l(t)}{\beta_{lp}}$。因此，在首播阶段任意 t 时刻，劣势运营商付费观看该节目的用户量为

$$D_{lp}(t)=\int_{\theta_{l0}^*(t)}^{\theta(t)}\mathrm{d}\theta=\theta(t)-\theta_{l0}^*(t) \tag{6}$$

优势运营商在 t_0 时刻取得了该节目播放权后，通过分析得到在 t 时刻，优势运营商和劣势运营商付费观看该节目的用户量表达式与 3.1 节的式（2）一致。

下面继续在劣势运营商与优势运营商不同的免费模式推出时间情况下，分析动态需求。

3.2.1 劣势运营商提前推出免费模式情况

劣势运营商在 t_{al} 时刻推出免费模式后（即 $t_{al}<t_h$），同理 3.1 节的分析过程，通过进一步计算可得在 t 时刻，优势运营商付费观看以及劣势运营商付费和免费观看该节目的用户量表达式与式（3）一致。

优势运营商在 t_h 时刻推出免费模式后，同理可得在 t 时刻，优势运营商和劣势运营商付费和免费观看该节目的用户量表达式与式（4）一致。

3.2.2 劣势运营商不提前推出免费模式情况

优势运营商在 t_h 时刻推出免费模式后，通过分析得到在 t 时刻，优势运营商付费和免费观看以及劣势运营商付费观看该节目的用户量表达式与式（5）一致。

劣势运营商在 t_{dl} 时刻推出免费模式后（即 $t_{dl} \geqslant t_h$），通过分析可得在 t 时刻，优势运营商与劣势运营商付费和免费观看该节目的用户量表达式与式（4）一致。

4 双寡头运营商微分博弈模型

考虑节目的总播放期为 $[0, T \in +\infty]$，在不影响分析的情况下，不妨假设运营商除宣传成本外，其他成本为零。在第三节讨论的不同首播权及劣势运营商不同的免费模式推出情况下，构建各运营商利润最大化问题的微分博弈模型。由于需要将问题划分成多阶段，因此采用逆序求解法。

4.1 优势运营商取得首播权（情形 S）

4.1.1 劣势运营商提前推出免费模式情况

将播放期划分为 $[0, t_0]$，$[t_0, t_{al}]$，$[t_{al}, t_h]$ 和 $[t_h, T]$。$[0, t_0]$ 为优势运营商首播期，$[t_0, t_{al}]$ 为优势运营商与劣势运营商同时进行收费模式期，$[t_{al}, t_h]$ 为劣势运营商提前推出免费模式期，$[t_h, T]$ 为优势运营商和劣势运营商均推出免费模式期。

根据逆推法，首先求解两个运营商在 $[t_h, T]$ 阶段的利润。本阶段利润最大化问题的目标函数可表示为

$$\begin{cases} \max\limits_{p_i(\cdot), n_i(\cdot)} \pi_{4i} = \int_{t_h}^{T} \mathrm{e}^{-\rho(t-t_h)} (p_i(t) D_{ip}(t) + \kappa_i n_i(t) D_{in}(t)) \mathrm{d}t \\ D_{ip}(t) = \dot{x}_{ip}(t), D_{in}(t) = \dot{x}_{in}(t) \end{cases} \tag{7}$$

其中，$x_{ip}(t)$ 和 $x_{in}(t)$ 分别为运营商 i 在 t 时刻前已付费/免费观看节目的累积用户量。

上述利润最大化问题的哈密顿函数为

$$H_{4i} = (p_i(t) + \lambda_{ip}(t)) D_{ip}(t) + (\kappa_i n_i(t) + \chi_{in}(t)) D_{in}(t)$$

其中，$\chi_{in}(t)$ 为协状态变量。

根据最优化一阶必要条件和横截条件，通过计算可得优势运营商和劣势运营商在 $[t_h, T]$ 阶段收费最优定价和免费嵌入最优广告量分别为

$$\begin{cases} p_h^*(t) = \dfrac{(\beta_{hp} - \beta_{lp}) D_{hp}(t)}{\alpha_p} \\ n_h^*(t) = \dfrac{(\beta_{lp} - \beta_{hn})(\beta_{hn} - \beta_{ln}) D_{hn}(t)}{\alpha_n (\beta_{lp} - \beta_{ln})} \end{cases}, \quad \begin{cases} p_l^*(t) = \dfrac{(\beta_{hp} - \beta_{lp})(\beta_{lp} - \beta_{hn}) D_{lp}(t)}{\alpha_p (\beta_{hp} - \beta_{hn})} \\ n_l^*(t) = \dfrac{\beta_{ln}(\beta_{hn} - \beta_{ln}) D_{ln}(t)}{\alpha_n \beta_{hn}} \end{cases} \tag{8}$$

在 $[t_{al}, t_h]$ 与 $[t_h, T]$ 阶段，优势运营商和劣势运营商各自在 $[t_{al}, T]$ 内利润最大化问题的目标函数分别可表示为

$$\begin{cases}\max\limits_{p_h(\cdot)}(\pi_{3h}+\pi_{4h}^*)=\int_{t_{al}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\rho(t-t_{al})}p_h(t)D_{hp}(t)\mathrm{d}t+\pi_{4h}^*\\ D_{hp}(t)=\dot{x}_{hp}(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\max\limits_{p_l(\cdot),n_l(\cdot)}(\pi_{3l}+\pi_{4l}^*)=\int_{t_{al}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\rho(t-t_{al})}(p_l(t)D_{lp}(t)+\kappa_l n_l(t)D_{ln}(t))\,\mathrm{d}t+\pi_{4l}^*\\ D_{lp}(t)=\dot{x}_{lp}(t),D_{ln}(t)=\dot{x}_{ln}(t)\end{cases}$$

通过计算可得在$[t_{al},t_h]$阶段，优势运营商收费最优定价、劣势运营商收费最优定价和免费嵌入最优广告量分别为

$$p_h^*(t)=\frac{(\beta_{hp}-\beta_{lp})D_{hp}(t)}{\alpha_p} \tag{9}$$

$$\begin{cases}p_l^*(t)=\dfrac{2\kappa_l(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\alpha_n\beta_{lp}(1-x(t)+M_1(t))+\beta_{ln}M_2(t)(\kappa_l\alpha_p+\alpha_n))}{\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\kappa_l\alpha_n+\alpha_p)+F}\\ n_l^*(t)=\dfrac{\beta_{ln}(\beta_{hp}-\beta_{lp})\begin{bmatrix}(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\kappa_l\alpha_p+\alpha_n)(1-x(t))-(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\kappa_l\alpha_p+\alpha_n)M_1(t)\\+\kappa_l\alpha_p(4\beta_{hp}-\beta_{lp}-3\beta_{ln})M_2(t)\end{bmatrix}}{\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\kappa_l\alpha_n+\alpha_p)+F}\end{cases} \tag{10}$$

其中，

$$M_1(t)=\frac{f_h(t)-f_l(t)}{\beta_{hp}-\beta_{lp}},\quad M_2(t)=\frac{f_l(t)}{\beta_{ln}}$$

$$F=\kappa_l\alpha_p\alpha_n(\beta_{lp}(7\beta_{hp}-\beta_{lp})-3\beta_{ln}(\beta_{hp}+\beta_{lp}))-(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\alpha_n^2(\beta_{lp}+\beta_{ln})+2\beta_{ln}\alpha_p^2\kappa_l^2)$$

由式(10)可知$p_l^*(t)$和$n_l^*(t)$的分子均大于零，所以只有当$\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\kappa_l\alpha_n+\alpha_p)+F>0$时，价格和广告量满足非负条件。因此，下文均是在$\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\kappa_l\alpha_n+\alpha_p)+F>0$条件下进行问题分析。

在$[t_0,t_{al}]$、$[t_{al},t_h]$与$[t_h,T]$阶段，优势运营商和劣势运营商在$[t_0,T]$内利润最大化问题的目标函数分别可表示为

$$\begin{cases}\max\limits_{p_h(\cdot)}(\pi_{2h}+\pi_{3h}^*+\pi_{4h}^*)=\int_{t_0}^{t_{al}}\mathrm{e}^{-\rho(t-t_0)}p_h(t)D_{hp}(t)\,\mathrm{d}t+\pi_{3h}^*+\pi_{4h}^*\\ D_{hp}(t)=\dot{x}_{hp}(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\max\limits_{p_l(\cdot)}\pi_{2l}=\int_{t_0}^{t_{al}}\mathrm{e}^{-\rho(t-t_0)}p_l(t)D_{lp}(t)\mathrm{d}t+\pi_{3l}^*+\pi_{4l}^*\\ D_{lp}(t)=\dot{x}_{lp}(t)\end{cases}$$

由最优化一阶必要条件和横截条件，通过计算可得优势运营商和劣势运营商在$[t_0,t_{al}]$阶段的收费最优定价分别为

$$\begin{cases}p_h^*(t)=\dfrac{(\beta_{hp}-\beta_{lp})(2\beta_{hp}(1-x(t)+M_1(t))-\beta_{lp}M_3(t))}{\alpha_p(4\beta_{hp}-\beta_{lp})}\\ p_l^*(t)=\dfrac{\beta_{lp}(\beta_{hp}-\beta_{lp})(1-x(t)+M_1(t)+2M_3(t))}{\alpha_p(4\beta_{hp}-\beta_{lp})}\end{cases} \tag{11}$$

其中，$M_3(t)=\dfrac{f_l(t)}{\beta_{lp}}-\dfrac{f_h(t)-f_l(t)}{\beta_{hp}-\beta_{lp}}$。

在$[t_0,t_0+\Delta t_{lb}]$阶段，劣势运营商决定节目推出后的宣传投入强度，使其在$[t_0,T]$内总利润最大化，目标函数可表述为

$$\begin{cases}\max\limits_{s_l(\cdot)}\pi_{1l}=\pi_{2l}^*-\int_{t_0}^{t_0+\Delta t_{lb}}s_l^2(t)\mathrm{d}t\\ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_{lb}}s_l^2(t)\mathrm{d}t=(1-\lambda_l)C_l\end{cases}$$

通过计算可得劣势运营商在节目推出后的最优宣传投入强度为

$$s_l^*(t)=\sqrt{\frac{(1-\lambda_l)C_l}{\Delta t_{lb}}},t\in[t_0,t_0+\Delta t_{lb}] \tag{12}$$

在$[t_0-\Delta t_{la},t_0]$阶段，劣势运营商决定节目推出前的宣传投入强度，使其在$[t_0,T]$内总利润最大化，目标函数可表述为

$$\begin{cases}\max\limits_{s_l(\cdot)}\pi_l=\pi_{1l}^*-\int_{t_0-\Delta t_{la}}^{t_0}s_l^2(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \int_{t_0-\Delta t_{la}}^{t_0}s_l^2(\tau)\mathrm{d}\tau=\lambda_lC_l\end{cases}$$

通过计算可得劣势运营商在节目推出前的最优宣传投入强度为

$$s_l^*(\tau)=\sqrt{\frac{\lambda_lC_l}{\Delta t_{la}}},\tau\in[t_0-\Delta t_{la},t_0] \tag{13}$$

在$[0,t_0]$、$[t_0,t_{al}]$、$[t_{al},t_h]$与$[t_h,T]$阶段，优势运营商在播放期$[0,T]$内总利润最大化问题的目标函数可表示为

$$\begin{cases}\max\limits_{p_h(\cdot)}\pi_{1h}=\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\rho t}p_h(t)D_{hp}(t)\,\mathrm{d}t+\sum\limits_{j=2}^{4}\pi_{jh}^*\\ D_{hp}(t)=\dot{x}_{hp}(t)\end{cases}$$

通过计算可得优势运营商在$[0,t_0]$阶段收费最优定价为

$$p_h^*(t)=\frac{\beta_{hp}(1-x_h(t))+f_h(t)}{2\alpha_p} \tag{14}$$

在$[0,\Delta t_{hb}]$阶段，优势运营商决定节目推出后的宣传投入强度，使其在$[0,T]$内总利润最大化，目标函数可表述为

$$\begin{cases}\max\limits_{s_h(\cdot)}\pi_{0h}=\pi_{1h}^*-\int_0^{\Delta t_{hb}}s_h^2(t)\mathrm{d}t\\ \int_0^{\Delta t_{hb}}s_h^2(t)\mathrm{d}t=(1-\lambda_h)C_h\end{cases}$$

通过计算可得优势运营商在节目推出后的最优宣传投入强度为

$$s_h^*(t)=\sqrt{\frac{(1-\lambda_h)C_h}{\Delta t_{hb}}},t\in[0,\Delta t_{hb}] \tag{15}$$

在$[-\Delta t_{ha},0]$阶段，优势运营商决定节目推出前的宣传投入强度，使其在$[0,T]$内总利润最大化，目标函数可表述为

$$\begin{cases}\max\limits_{s_h(\cdot)}\pi_h=\pi_{0h}^*-\int_{-\Delta t_{ha}}^{0}s_h^2(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \int_{-\Delta t_{ha}}^{0}s_h^2(\tau)\mathrm{d}\tau=\lambda_hC_h\end{cases}$$

通过计算可得优势运营商在节目推出前的最优宣传投入强度为

$$s_h^*(\tau)=\sqrt{\frac{\lambda_h C_h}{\Delta t_{ha}}},\tau\in[-\Delta t_{ha},0] \tag{16}$$

4.1.2 劣势运营商不提前推出免费模式情况

将播放期划分为$[0,t_0]$、$[t_0,t_h]$、$[t_h,t_{dl}]$和$[t_{dl},T]$。$[0,t_0]$为优势运营商首播期，$[t_0,t_h]$为优势运营商与劣势运营商同时进行收费模式期，$[t_h,t_{dl}]$为优势运营商提前推出免费模式期，$[t_{dl},T]$为优势运营商与劣势运营商均推出免费模式期。由于两个运营商在各阶段目标函数的构建和均衡解的求解过程与 4.1.1 节相同，因此不再赘述，下文仅给出优势运营商和劣势运营商在各阶段的决策变量和均衡解。

在$[t_{dl},T]$阶段，优势运营商和劣势运营商均推出免费模式。因此，两个运营商均将收费定价和免费广告量作为决策变量使各自在本阶段利润最大化，通过计算可得在$[t_{dl},T]$阶段的最优解表达式与式（8）一致。

在$[t_h,t_{dl}]$阶段，优势运营商提前推出免费模式。因此，优势运营商将收费定价和免费广告量作为决策变量，劣势运营商将收费定价作为决策变量。通过计算可得在$[t_h,t_{dl}]$阶段的最优解表达式分别为

$$\begin{cases} p_h^*(t)=\dfrac{(\beta_{hp}-\beta_{lp})D_{hp}(t)}{\alpha_p} \\ n_h^*(t)=\dfrac{\beta_{hn}(\beta_{lp}-\beta_{hn})D_{hn}(t)}{\alpha_n\beta_{lp}} \end{cases},\quad p_l^*(t)=\frac{(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{hn})D_{lp}(t)}{\alpha_p(\beta_{hp}-\beta_{hn})} \tag{17}$$

在$[t_0,t_h]$阶段，优势运营商与劣势运营商均采用收费模式播出该节目。因此，各运营商均将收费定价作为决策变量。通过计算可得各运营商的收费最优定价表达式与式（11）一致。

在$[t_0,t_0+\Delta t_{lb}]$阶段，劣势运营商将节目推出后的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得劣势运营商在节目推出后的最优宣传投入强度与式（12）一致。

在$[t_0-\Delta t_{la},t_0]$阶段，劣势运营商将节目推出前的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得劣势运营商在节目推出前的最优宣传投入强度与式（13）一致。

在$[0,t_0]$阶段，优势运营商采用收费模式首播该节目。因此，优势运营商将收费定价作为决策变量，通过计算可得优势运营商收费最优定价表达式与式（14）一致。

在$[0,\Delta t_{hb}]$阶段，优势运营商将节目推出后的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得优势运营商在节目推出后的最优宣传投入强度与式（15）一致。

在$[-\Delta t_{ha},0]$阶段，优势运营商将节目推出前的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得优势运营商在节目推出前的最优宣传投入强度与式（16）一致。

4.1.3 结论分析

结论 1 在优势运营商取得首播权情形下，存在临界值α_p^{S*}，当$\alpha_p<\alpha_p^{S*}$时，劣势运营商与优势运营商同步推出免费模式为最优策略；反之，劣势运营商提前推出免费模式为最优策略，并且最优的提前时间为$t_h-t_{al}^{S*}$。

证明：见附录。

结论 1 表明，当用户对节目收费价格的敏感度较低时（即$\alpha_p<\alpha_p^{S*}$），用户通过付费方式观看节目的意愿增加，因此，在优势运营商未推出免费模式前，劣势运营商应采用收费模式吸引更多高类型用户付

费观看视频节目；相反，较高的价格敏感度会“阻碍”用户的付费意愿，此时劣势运营商应提前推出免费模式吸引更多低类型用户免费观看视频节目，并且劣势运营商始终不能晚于优势运营商推出免费模式，这是因为劣势运营商晚于优势运营商推出免费模式会导致低类型用户选择优势运营商免费观看视频节目，从而造成劣势运营商潜在用户的流失。因此，对于未取得首播权的劣势运营商，应密切跟踪优势运营商对该节目的免费模式推出时间，同时结合用户群体对该节目收费价格的敏感度情况决定是采用同步还是提前于优势运营商推出免费模式，但绝不能晚于优势运营商推出免费模式。

在结论 1 的基础上，继续分析未取得首播权的劣势运营商应如何制定节目推出前后期的宣传时间以及分配前后期的宣传投入才能更好地提高节目观看用户量。下面分别在劣势运营商同步和提前于优势运营商推出免费模式的最优策略下对以上问题进行分析。

结论 2 在优势运营商取得首播权情形下，如果劣势运营商与优势运营商同步推出免费模式，则劣势运营商的节目推出前后期最优宣传时间为 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$ 和 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}$，其中前期宣传投入最优比为 $\lambda_l^{\mathrm{SE}*}$；如果劣势运营商提前推出免费模式，则劣势运营商的节目推出前后期最优宣传时间为 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}$ 和 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA}*}$，其中前期宣传投入最优比为 $\lambda_l^{\mathrm{SA}*}$，并且较同步推出免费模式情况，前期多宣传 Δ_a^{S} 时间和多投入 $\Delta_{\lambda_l}^{\mathrm{S}}$ 比例，后期少宣传 Δ_b^{S} 时间。

证明：见附录。

结论 2 表明：未取得首播权的劣势运营商在节目推出前后能够通过制定合理的宣传时间和投入分配比例更有效地提高节目用户量从而扭转竞争劣势，并且劣势运营商提前推出免费模式情况相比于同步推出免费模式情况更加重视前期宣传。这是因为当用户对节目收费价格敏感度较高时，劣势运营商选择提前推出免费模式为最优策略（根据结论 1），在此情况下，较高的价格敏感度会导致用户付费观看节目的意愿降低，因此，劣势运营商延长和增加节目推出前的宣传时间与宣传投入能提高用户的预期效用，从而达到增加节目用户量的目的。综上，对于未取得首播权的劣势运营商，应在节目推出前后设置合理的宣传期以及合理分配宣传投入预算，并且相对于同步推出免费模式情况，劣势运营商在提前推出免费模式情况更应侧重节目推出前的宣传策略。

普遍观点认为视频节目在推出前都会进行一定时间的宣传。那么，对于未取得首播权的劣势运营商，是否也一定要进行前期宣传呢？由附录中结论 2 的证明过程能够发现，劣势运营商不论与优势运营商同步还是提前推出免费模式，前期的最优宣传时间均和溢出效应大小有关，那么宣传溢出效应如何影响前期最优宣传时间呢？通过分析即可得如下结论 3（证明过程见附录）。

结论 3 在优势运营商取得首播权情形下，如果劣势运营商节目宣传对优势运营商的溢出效应越大，则劣势运营商对节目的前期宣传时间越短，当溢出效应增加到一定阈值（同步推出免费模式情况为 $\varepsilon_l^{\mathrm{SE}*}$，提前推出免费模式情况为 $\varepsilon_l^{\mathrm{SA}*}$），前期宣传时间缩短为零。

结论 3 表明：在优势运营商取得首播权情形下，劣势运营商在未取得节目播放权时进行的宣传投入产生的溢出效应会帮助优势运营商吸引更多用户，从而挤压了劣势运营商的潜在市场，这意味着未取得首播权的劣势运营商进行前期宣传未必能有效提高节目的观看用户量，宣传投入的有效性需取决于宣传溢出效应大小。在宣传溢出效应较小情况下，劣势运营商应在节目推出前进行宣传；而在宣传溢出效应较大情况下，劣势运营商不应在节目推出前进行宣传。

4.2 劣势运营商取得首播权（情形 I）

由于本节与 4.1 节目标函数的构建和最优解的求解过程相同，因此，不再赘述。本节直接给出优势

运营商与劣势运营商在各阶段的决策变量和最优解。

4.2.1 劣势运营商提前推出免费模式情况

将播放期划分为$[0,t_0]$、$[t_0,t_{al}]$、$[t_{al},t_h]$和$[t_h,T]$。$[0,t_0]$为劣势运营商首播期，$[t_0,t_{al}]$为优势运营商与劣势运营商同时进行收费模式期，$[t_{al},t_h]$为劣势运营商提前推出免费模式期，$[t_h,T]$为优势运营商与劣势运营商均推出免费模式期。

在$[t_h,T]$阶段，优势运营商和劣势运营商均将收费定价和免费嵌入广告量作为决策变量，通过计算可得最优解表达式与式（8）一致。

在$[t_{al},t_h]$阶段，优势运营商将收费定价作为决策变量，劣势运营商将收费定价和免费嵌入广告量作为决策变量，通过计算可得最优解表达式与式（9）和式（10）一致。

在$[t_0,t_{al}]$阶段，各运营商均将收费定价作为决策变量，通过计算可得最优解为

$$\begin{cases} p_h^*(t)=\dfrac{(\beta_{hp}-\beta_{lp})(2\beta_{hp}(1-x(t)+M_1(t))-\beta_{lp}M_3(t))}{\alpha_p(4\beta_{hp}-\beta_{lp})} \\ p_l^*(t)=\dfrac{\beta_{lp}(\beta_{hp}-\beta_{lp})(1-x(t)+M_1(t)+2M_3(t))}{\alpha_p(4\beta_{hp}-\beta_{lp})} \end{cases} \tag{18}$$

在$[t_0,t_0+\Delta t_{hb}]$阶段，优势运营商将节目推出后的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得最优解为

$$s_h^*(t)=\sqrt{\frac{(1-\lambda_h)C_h}{\Delta t_{hb}}},t\in[t_0,t_0+\Delta t_{hb}] \tag{19}$$

在$[t_0-\Delta t_{ha},t_0]$阶段，优势运营商将节目推出前的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得最优解为

$$s_h^*(\tau)=\sqrt{\frac{\lambda_h C_h}{\Delta t_{ha}}},\tau\in[t_0-\Delta t_{ha},t_0] \tag{20}$$

在$[0,t_0]$阶段，劣势运营商将收费定价作为决策变量，通过计算可得最优解为

$$p_l^*(t)=\frac{\beta_{lp}(1-x_l(t))+f_l(t)}{2\alpha_p} \tag{21}$$

在$\left[0,\Delta t_{lb}\right]$阶段，劣势运营商将节目推出后的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得最优解为

$$s_l^*(t)=\sqrt{\frac{(1-\lambda_l)C_l}{\Delta t_{lb}}},t\in[0,\Delta t_{lb}] \tag{22}$$

在$[-\Delta t_{la},0]$阶段，劣势运营商将节目推出前的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得最优解为

$$s_l^*(\tau)=\sqrt{\frac{\lambda_l C_l}{\Delta t_{la}}},\tau\in[-\Delta t_{la},0] \tag{23}$$

4.2.2 劣势运营商不提前推出免费模式情况

将播放期划分为$[0,t_0]$、$[t_0,t_h]$、$[t_h,t_{dl}]$和$[t_{dl},T]$。$[0,t_0]$为劣势运营商首播期，$[t_0,t_h]$为优势运营商与劣势运营商同时进行收费模式期，$[t_h,t_{dl}]$为优势运营商提前推出免费模式期，$[t_{dl},T]$为优势运营商与劣势运营商均推出免费模式期。

在$[t_{dl},T]$阶段，优势运营商和劣势运营商均将收费定价和免费广告量作为决策变量，通过计算可得最优解表达式同式（8）。

在$[t_h,t_{dl}]$阶段，优势运营商将收费定价和免费广告量作为决策变量，劣势运营商将收费定价作为决策变量，通过计算可得最优解表达式同式（17）。

在$[t_0,t_h]$阶段，各运营商均将收费定价作为决策变量，通过计算可得最优解表达式同式（18）。

在$[t_0,t_0+\Delta t_{hb}]$阶段，优势运营商将节目推出后的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得最优解表达式同式（19）。

在$[t_0-\Delta t_{ha},t_0]$阶段，优势运营商将节目推出前的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得最优解表达式同式（20）。

在$[0,t_0]$阶段，劣势运营商将收费定价作为决策变量，通过计算可得最优解表达式同式（21）。

在$[0,\Delta t_{lb}]$阶段，劣势运营商将节目推出后的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得最优解表达式同式（22）。

在$[-\Delta t_{la},0]$阶段，劣势运营商将节目推出前的宣传投入强度作为决策变量，通过计算可得最优解表达式同式（23）。

4.2.3 结论分析

结论 4 在劣势运营商取得首播权情形下，存在临界值$\alpha_p^{\mathrm{I}*}$，当$\alpha_p<\alpha_p^{\mathrm{I}*}$时，劣势运营商与优势运营商同步推出免费模式为最优策略；反之，劣势运营商提前推出免费模式为最优策略，并且最优的提前时间为$t_h-t_{al}^{\mathrm{I}*}$。

结论 4 表明：对于取得首播权的劣势运营商，也应根据用户对该节目收费价格的敏感度情况选择最优的节目播出模式。当用户对节目收费价格的敏感度较低时，劣势运营商应跟随优势运营商采用同步的节目播出策略；当用户对节目收费价格的敏感度较高时，劣势运营商应采用比优势运营商更早推出免费模式的播出策略。

结论 5 在劣势运营商取得首播权情形下，如果劣势运营商与优势运营商同步推出免费模式，则劣势运营商的节目推出前后期最优宣传时间为$\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$和$\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}$，其中前期宣传投入最优比为$\lambda_l^{\mathrm{IE}*}$；如果劣势运营商提前推出免费模式，则劣势运营商的节目推出前后期最优宣传时间为$\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$和$\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}$，其中前期宣传投入最优比为$\lambda_l^{\mathrm{IA}*}$，并且较同步推出免费模式情况，前期多投入$\Delta_{\lambda_l}^{\mathrm{I}}$比例，后期少宣传$\Delta_b^{\mathrm{I}}$时间。

结论 5 表明：取得首播权的劣势运营商在节目推出前后同样能运用最优宣传时间策略和宣传投入的最优分配策略更有效地提高节目用户量，并且劣势运营商不论采用何种节目播出模式，节目推出前的最优宣传时间均应相同，但提前推出免费模式情况的前期投入大于同步推出免费模式情况的前期投入。因此，取得首播权的劣势运营商应合理地制定宣传时间和分配宣传投入预算，并且提前推出免费模式情况的前期宣传投入始终应高于同步推出免费模式情况的前期宣传投入。

在劣势运营商取得首播权情形下，溢出效应是否也会影响节目推出前的宣传时间呢？同时根据结论 2 和结论 4，在不同首播权情形下，劣势运营商在节目推出前的最优宣传时间有何差异呢？通过分析可得如下结论 6（证明过程见附录）。

结论 6 在劣势运营商取得首播权情形下，劣势运营商节目宣传对优势运营商的溢出效应不影响其节目推出前的最优宣传时间，并且节目推出前的最优宣传时间大于未取得首播权情形下节目推出前的最优宣传时间。

结论 6 表明：劣势运营商在取得首播权情形下，节目推出前的最优宣传时间和溢出效应无关，并且

劣势运营商在取得首播权情形始终要比未取得首播权情形更早对节目进行宣传。这是因为优势运营商未取得节目的首播权，劣势运营商对节目进行的前期宣传效果并不会溢出给优势运营商，所以溢出效应并不会影响劣势运营商的前期宣传时间。由于溢出效应不会“抑制”劣势运营商的前期宣传时间，因此，取得首播权的劣势运营商应充分利用与优势运营商未获得播放权前形成的时间差距更早地进行节目宣传来吸引更多用户观看节目。

5 管理启示与结束语

本文在劣势运营商未取得和取得节目首播权的不同情形下，通过构建劣势运营商与优势运营商微分博弈模型，研究了劣势运营商如何利用播出模式和宣传策略提高节目的观看用户量。根据研究结论可得如下管理启示：①结论 1 与结论 4 启示。劣势运营商不论是否取得节目首播权，均应根据节目的主要消费群体对收费模式定价的敏感度情况来决策同步还是提前于优势运营商推出免费模式。②结论 2、结论 3 与结论 5 启示。在不同首播权情形下，劣势运营商要根据同步和提前于优势运营商推出免费模式的实际情况来制定节目推出前后的宣传时间和宣传投入，只有这样才能更有效地提高节目观看用户量。在未取得节目首播权情形下，劣势运营商还要根据节目宣传的溢出效应大小决定是否应在节目推出前期进行宣传。也就是说，在宣传溢出效应较小情况下，劣势运营商应进行前期宣传；反之，在宣传溢出效应较大情况下，劣势运营商只进行后期宣传为上策。③结论 6 启示。劣势运营商取得首播权情形相比于未取得首播权情形，节目推出前的宣传时间应更长。

目前由于国内各大视频运营商播出节目内容的严重趋同，因此众多视频运营商争相通过取得节目首播权的手段抢占用户市场。本文在这一现实背景下研究了劣势运营商未取得和取得首播权情景下，如何运用节目播出模式和宣传策略与优势运营商争夺节目用户量的问题。研究结果对于劣势运营商有效提高节目用户量进而扭转竞争劣势具有一定的借鉴和指导意义。

参 考 文 献

[1] Kumar S，Sethi S P. Dynamic pricing and advertising for web content providers[J]. European Journal of Operational Research，2009，197（3）：924-944.

[2] Cheng X Y，Mu L F，Sun Y H，et al. Optimal pricing decisions for the online video platform under customer choice[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research，2018，35（1）：1850002.

[3] Xu S S，Ling L Y. Which is the optimal commercial mode for a video site：paid，free，or hybrid?[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research，2020，37（5）：2050022.

[4] 李稚，谭德庆. 基于连续时间模型的网络视频商业模式选择研究[J]. 管理评论，2020，32（1）：211-218.

[5] Li Z，Tan D Q. Two-stage dynamic pricing and advertising strategies for online video services[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society，2017，2017：1-8.

[6] Chiang I R，Jhang-Li J H. Competition through exclusivity in digital content distribution[J]. Production and Operations Management，2020，29（5）：1270-1286.

[7] 张诗纯，陈靖. 基于双边市场的网络视频平台定价研究[J]. 管理学报，2021，18（9）：1392-1400.

[8] 李志鹏，周晓宇. 考虑消费者履足效应的网络视频产业链最优决策研究[J/OL]. 中国管理科学，2022：1-12[2024-01-29].

[9] 谭德庆，李子庆. 网络视频内容提供模式选择、价格及嵌入广告量研究[J]. 管理评论，2017，29（4）：91-97.

[10] 李子庆. 网络视频媒体同步播出节目运营策略研究[J]. 中国管理科学，2021，29（3）：230-238.

[11] 李子庆，谭德庆. 节目试看对网络视频运营商市场策略影响研究[J]. 中国管理科学，2019，27（1）：143-152.
[12] 李子庆，谭德庆. 考虑用户情绪效用情况下的网络视频运营商市场策略研究[J]. 管理评论，2019，31（1）：147-154.
[13] de Matos M G，Ferreira P. The effect of binge-watching on the subscription of video on demand：results from randomized experiments[J]. Information Systems Research，2020，31（4）：1337-1360.
[14] 谭德庆，吴昊. 网络视频节目中羊群效应的影响研究[J]. 运筹与管理，2021，30（6）：144-149.
[15] 李志鹏，解婷，陈莎. 口碑效应下网络视频定价与广告投放最优决策[J]. 中国管理科学，2022，30（3）：230-239.
[16] 王文怡，郭强，石纯来. 社会影响下在线视频内容提供模式的选择研究[J]. 管理评论，2021，33（1）：164-176.
[17] Elberse A，Eliashberg J. Demand and supply dynamics for sequentially released products in international markets：the case of motion pictures[J]. Marketing Science，2003，22（3）：329-354.
[18] Ehrenberg A S C. Repetitive advertising and the consumer[J]. Journal of Advertising Research，2000，40（6）：39-48.
[19] Karray S，Debernitz L. The effectiveness of movie trailer advertising[J]. International Journal of Advertising，2017，36（2）：368-392.
[20] Finsterwalder J，Kuppelwieser V G，de Villiers M. The effects of film trailers on shaping consumer expectations in the entertainment industry—a qualitative analysis[J]. Journal of Retailing and Consumer Services，2012，19（6）：589-595.
[21] Hixson T K. Mission possible：targeting trailers to movie audiences[J]. Journal of Targeting，Measurement and Analysis for Marketing，2006，14（3）：210-224.
[22] Rennhoff A D，Wilbur K C. The effectiveness of post-release movie advertising[J]. International Journal of Advertising，2011，30（2）：305-328.
[23] 孙春华，刘业政. 电影预告片在线投放对票房的影响：基于文本情感分析方法[J]. 中国管理科学，2017，25（10）：151-161.
[24] Trehan K，Maan G S. Uses and functions of teaser campaigns in advertising and promotion：a content analysis of newspaper and television advertisements in India[J]. Journal of Mass Communication & Journalism，2013，3（1）：1-8.
[25] Nerlove M，Arrow K J. Optimal advertising policy under dynamic conditions[J]. Economica，1962，29（114）：129-142.
[26] Rao R C. Estimating continuous time advertising-sales models[J]. Marketing Science，1986，5（2）：125-142.
[27] Jørgensen S，Sigué S P，Zaccour G. Dynamic cooperative advertising in a channel[J]. Journal of Retailing，2000，76（1）：71-92.
[28] Jørgensen S，Taboubi S，Zaccour G. Cooperative advertising in a marketing channel[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2001，110（1）：145-158.
[29] Wu X L，Zhang F Q，Zhou Y. Brand spillover as a marketing strategy[J]. Management Science，2022，68（7）：4755-5555.
[30] Zhou Y J，Liu T M，Cai G S. Impact of In-store promotion and spillover effect on private label introduction[J]. Service Science，2019，11（2）：96-112.
[31] 汪敢甫，艾兴政，钟丽. 基于溢出效应与平台服务的竞争网络平台的销售模式研究[J]. 运筹与管理，2020，29（3）：149-157.

Program Broadcast Mode and Promotion Strategy of Inferior Online Video Operators Under Different Premiere Rights Situations

WU Hao，TAN Deqing
（School of Economics and Management，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China）

Abstract This paper analyses the optimal broadcasting mode and promotion strategy of program of inferior operator by constructing differential game model between inferior operator and superior operator under different premiere right situations. The study shows that the inferior operator should decide the optimal broadcasting mode according to the sensitivity of users to the pricing of program fees. Further，the optimal promotion time and the optimal proportion of promotion investment before and after the launch of the program of the inferior operator are obtained. In the case of the inferior operator without the premier rights，the promotion time before the launch of its program should be shorter as the spillover effect increases，and the promotion time before the launch of the program of the inferior operator without the premier rights should be shorter than that of the program of the inferior operator with the premier rights.

Key words Differential games，Online video platform，Broadcasting mode，Promotion period

作者简介

吴昊（1990—），男，西南交通大学经济管理学院博士研究生，研究方向为服务管理、决策科学。E-mail：wh900707@126.com。

谭德庆（1966—），男，西南交通大学经济管理学院教授、博士生导师，研究方向为产业组织发展理论、博弈论及其应用。E-mail：tdq1966@126.com。

附 录

结论 1 证明：在情形 S 且 $t_{dl} \geqslant t_h$ 情况下，将均衡解式（11）至式（13）代入式（2）、式（17）代入式（5）、式（8）代入式（4）后，分别求解微分方程组（2）、（4）和（5），可得劣势运营商在播放期内观看节目的总用户量为

$$x_l^{\mathrm{SD}} = \frac{1}{3} + x_l^{\mathrm{S}}(t_h) + \frac{2\beta_{lp}(\beta_{hp}-\beta_{hn})(x^{\mathrm{SD}}(t_{dl}) - x^{\mathrm{S}}(t_h))}{\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - \beta_{hp}\beta_{hn} - \beta_{lp}^2} - \frac{1}{3}x^{\mathrm{SD}}(t_{dl})$$
$$+ \int_{t_h}^{t_{dl}} \frac{(\beta_{hp}-\beta_{hn})[2\beta_{lp}M_4(t) - (\beta_{lp}-\beta_{hn})M_5(t)]}{\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - \beta_{hp}\beta_{hn} - \beta_{lp}^2}\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_{t_{dl}}^{T} E_m(t)\mathrm{d}t \tag{24}$$

其中，

$$M_4(t) = \frac{(\beta_{hp}-\beta_{hn})(f_l(t) - f_h(t))}{(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{hn})}, \quad M_5(t) = \frac{\beta_{lp}f_h(t) - \beta_{hn}f_l(t)}{\beta_{hn}(\beta_{lp}-\beta_{hn})}$$

$$x_l^{\mathrm{S}}(t_h) = \frac{1}{3}(x(t_h) - x_h^{\mathrm{S}}(t_0)) + \frac{1}{3}\int_{t_0}^{t_h} M_3(t)\mathrm{d}t, \quad x_h^{\mathrm{S}}(t_0) = \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}\left(1 + \frac{f_h(\tau)}{\beta_{hp}}\right)\mathrm{d}\tau$$

$$x^{\mathrm{SD}}(t_{dl}) = 1 - (1 - x^{\mathrm{S}}(t_h))\mathrm{e}^{-\frac{[\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - \beta_{hp}\beta_{hn} - \beta_{lp}^2](t_{dl}-t_h)}{4\beta_{lp}(2\beta_{hp}-\beta_{hn}) - 2(\beta_{hp}\beta_{hn}+\beta_{lp}^2)}} + \int_{t_h}^{t_{dl}} E_d(t)\mathrm{d}t$$

$$x^{\mathrm{S}}(t) = 1 - (1 - x_h^{\mathrm{S}}(t_0))\mathrm{e}^{-\frac{3\beta_{hp}(t-t_0)}{4\beta_{hp}-\beta_{lp}}} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{3\beta_{hp}(t-\tau)}{4\beta_{hp}-\beta_{lp}}} \frac{3\beta_{hp}M_1(\tau) + (2\beta_{hp}+\beta_{lp})M_3(\tau)}{4\beta_{hp}-\beta_{lp}}\mathrm{d}\tau$$

$$E_m(t) = \left(\frac{1}{\beta_{hp}-\beta_{lp}} + \frac{1}{\beta_{lp}-\beta_{hn}} + \frac{1}{\beta_{hn}-\beta_{ln}}\right)(f_l(t) - f_h(t)) + \frac{f_l(t)}{\beta_{ln}}$$

$$E_d(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\left[\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - \beta_{hp}\beta_{hn} - \beta_{lp}^2\right](t_{dl}-t)}{4\beta_{lp}(2\beta_{hp}-\beta_{hn}) - 2(\beta_{hp}\beta_{hn}+\beta_{lp}^2)}}\left[\frac{2\beta_{lp}(2\beta_{hp}-\beta_{hn}) + \beta_{hn}(2\beta_{hp}-3\beta_{hn}) - \beta_{lp}^2}{4\beta_{lp}(2\beta_{hp}-\beta_{hn}) - 2(\beta_{hp}\beta_{hn}+\beta_{lp}^2)}M_5(t)\right.$$
$$\left. + \frac{\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - (\beta_{lp}^2+\beta_{hp}\beta_{hn})}{4\beta_{lp}(2\beta_{hp}-\beta_{hn}) - 2(\beta_{hp}\beta_{hn}+\beta_{lp}^2)}M_1(t) + \frac{3\beta_{lp}(\beta_{hp}-\beta_{hn})M_4(t)}{2\beta_{lp}(2\beta_{hp}-\beta_{hn}) - (\beta_{hp}\beta_{hn}+\beta_{lp}^2)}\right]$$

对式（24）x_l^{SD} 求关于 t_{dl} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SD}}}{\partial t_{dl}} = \left[\frac{2\beta_{lp}(\beta_{lp}-\beta_{hn})}{\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - \beta_{hp}\beta_{hn} - \beta_{lp}^2} - \frac{1}{3}\right](D^{\mathrm{SD}}(t_{dl}) + M_4(t_{dl}))$$
$$-\left[\frac{1}{3}E_m(t_{dl}) + \frac{(\beta_{hp}-\beta_{hn})(\beta_{lp}-\beta_{hn})M_5(t_{dl})}{\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - \beta_{hp}\beta_{hn} - \beta_{lp}^2} - \frac{1}{3}M_4(t_{dl})\right]$$

由于 $\dfrac{2\beta_{lp}(\beta_{hp}-\beta_{hn})}{\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - \beta_{hp}\beta_{hn} - \beta_{lp}^2} < \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{(\beta_{hp}-\beta_{hn})(\beta_{lp}-\beta_{hn})}{\beta_{lp}(7\beta_{hp}-5\beta_{hn}) - \beta_{hp}\beta_{hn} - \beta_{lp}^2} < \dfrac{1}{3}$，$x_l^{\mathrm{SD}} < 1$，因此，$\dfrac{\partial x_l^{\mathrm{SD}}}{\partial t_{dl}} < 0$。由于 $t_{dl} \geqslant t_h$，因此 x_l^{SD} 在 $t_{dl} = t_h$ 取最大值。将 $t_{dl} = t_h$ 代入式（24），可得劣势运营商在播放期内观看节目的总用户量为

$$x_l^{\mathrm{SE}} = \frac{1}{3}(1 - x_h^{\mathrm{S}}(t_0)) + \frac{1}{3}\int_{t_0}^{t_h} M_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{3}\int_{t_h}^{T} E_m(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{25}$$

在 $t_{al}<t_h$ 情况下，同理可得劣势运营商在播放期内观看节目的总用户量为

$$x_l^{\mathrm{SA}}=x_l^{\mathrm{SE}}+N_S \tag{26}$$

其中，

$$N_S=\int_{t_{al}}^{t_h}\left[\left(g-\frac{1}{3}\right)D^{\mathrm{SA}}(t)+S(t)\right]\mathrm{d}t\text{，}\quad D^{\mathrm{SA}}(t)=G(1-x^{\mathrm{SA}}(t))+E(t)$$

$$G=\frac{F}{\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\kappa_l\alpha_p+\alpha_n)+F}$$

$$g=\frac{1}{3}+\frac{1}{3F}(\kappa_l\alpha_p-\alpha_n)(\beta_{hp}-\beta_{lp})[\alpha_n(2\beta_{lp}-\beta_{ln})-\kappa_l\alpha_p\beta_{ln}]$$

$$\begin{aligned}S(t)=&\frac{\beta_{hp}\{F-\alpha_n(\beta_{lp}-\beta_{ln})[\alpha_p\kappa_l(3\beta_{hp}+3\beta_{lp}-4\beta_{ln})-\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp})]\}f_l(t)}{2\beta_{ln}F(\beta_{hp}-\beta_{lp})}\\&+\left(\frac{1}{3}-g\right)\frac{f_h(t)}{(\beta_{hp}-\beta_{lp})}-\frac{\beta_{hp}f_l(t)}{3\beta_{lp}(\beta_{hp}-\beta_{lp})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(t)=&\frac{F-\alpha_n(\beta_{lp}-\beta_{ln})[\kappa_l\alpha_p(3\beta_{hp}-2\beta_{ln})-\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp}-\beta_{ln})]}{\beta_{ln}[F+\alpha_n(\alpha_p\kappa_l+\alpha_n)(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})]}f_l(t)\\&+\frac{\alpha_n(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\alpha_p\kappa_l+\alpha_n)}{\beta_{ln}\left[F+\alpha_n(\alpha_p\kappa_l+\alpha_n)(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})\right]}f_h(t)\end{aligned}$$

下面比较 x_l^{SE} 和 x_l^{SA} 关系，由式（25）和式（26）可知 $x_l^{\mathrm{SE}}-x_l^{\mathrm{SA}}=-N_S$，令 $N_S=0$，可得存在 $g_S^*=\frac{1}{3}-\frac{\int_{t_{al}}^{t_h}S(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_{al}}^{t_h}D^{SA}(t)\mathrm{d}t}$，当 $g>g_S^*$ 时，$N_S>0$；反之，$N_S<0$。进一步分解 g_S^*，可得关于 α_p 的临界值 $\alpha_p^{\mathrm{S}*}=\frac{\alpha_n}{\kappa_l}-\frac{3F\int_{t_{al}}^{t_h}S(t)\mathrm{d}t}{\kappa_l(\beta_{hp}-\beta_{lp})\left[\alpha_n(2\beta_{lp}-\beta_{ln})-\kappa_l\alpha_p^{\mathrm{S}*}\beta_{ln}\right]\int_{t_{al}}^{t_h}D^{\mathrm{SA}}(t)\mathrm{d}t}$。当 $\alpha_p>\alpha_p^{\mathrm{S}*}$ 时，$x_l^{\mathrm{SA}}>x_l^{\mathrm{SE}}$；当 $\alpha_p<\alpha_p^{\mathrm{S}*}$ 时，$x_l^{\mathrm{SE}}>x_l^{\mathrm{SA}}$。

在 $\alpha_p>\alpha_p^{\mathrm{S}*}$ 情况下，对 x_l^{SA} 求关于 t_{al} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial t_{al}}=\left(\frac{1}{3}-g\right)D^{\mathrm{SA}}\left(t_{al}\right)-S(t_{al})$$

根据最优化一阶条件，令 $\frac{\partial x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial t_{al}}=0$ 可得满足如下等式的最优 $t_{al}^{\mathrm{S}*}$ 为

$$\left(\frac{1}{3}-g\right)D^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S}*})=S(t_{al}^{\mathrm{S}*}) \tag{27}$$

下面验证 $t_{al}^{\mathrm{S}*}$ 的存在和唯一性，对 x_l^{SA} 求关于 $t_{al}^{\mathrm{S}*}$ 的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial t_{al}^{\mathrm{S}*2}}=\left(\frac{1}{3}-g\right)\left(\frac{\partial D^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S}*})}{\partial t_{al}^{\mathrm{S}*}}-\frac{3}{1-3g}\frac{\partial S(t_{al}^{\mathrm{S}*})}{\partial t_{al}^{\mathrm{S}*}}\right)$$

由于 $S(t_{al}^{\mathrm{S}*})$ 代表宣传效应产生的市场需求增量，因此 $S(t_{al}^{\mathrm{S}*})\ll D^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S}*})$ 且 $\left|\frac{3}{1-3g}\frac{\partial S(t_{al}^{\mathrm{S}*})}{\partial t_{al}^{\mathrm{S}*}}\right|\ll\left|\frac{\partial D^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S}*})}{\partial t_{al}^{\mathrm{S}*}}\right|$①，同

① Wu X L，Zhang F Q，Zhou Y. Brand spillover as a marketing strategy[J]. Management Science，2022，68（7）：4755-5555.

时根据式（27）可得$\frac{1}{3}-g>0$且市场需求随时间递减，即$\frac{\partial D^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S}*})}{\partial t_{al}^{\mathrm{S}*}}<0$，因此$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial t_{al}^{\mathrm{S}*2}}<0$，这说明能够保证存在唯一的$t_{al}^{\mathrm{S}*}$使得$x_l^{\mathrm{SA}}$最大。

结论 2 证明：在$\alpha_p<\alpha_p^{\mathrm{S}*}$情况下，对式（25）$x_l^{\mathrm{SE}}$求关于$\Delta t_{la}$的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{la}}=\frac{s_l^*(\tau)}{6\delta\Delta t_{la}{}^2}\left\{z_1[(2\delta\Delta t_{la}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}}-1]-\frac{\varepsilon_l}{2\beta_{hp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}[(2\delta\Delta t_{la}+1)\mathrm{e}^{\delta(t_0-\tau-\Delta t_{la})}-1]\mathrm{d}\tau\right\} \tag{28}$$

其中，

$$z_1=\mathrm{e}^{\delta t_0}\left(y_1\int_{t_0}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau+y_2\int_{t_h}^{T}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau\right)$$

$$y_1=\frac{\eta\beta_{hp}-\varepsilon_l\beta_{lp}}{\beta_{lp}(\beta_{hp}-\beta_{lp})},\quad y_2=\frac{\eta}{\beta_{ln}}+(\eta-\varepsilon_l)\left(\frac{1}{\beta_{hp}-\beta_{lp}}+\frac{1}{\beta_{lp}-\beta_{hn}}+\frac{1}{\beta_{hn}-\beta_{ln}}\right)$$

由最优化一阶条件，令$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{la}}=0$可得满足如下等式的最优$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$为

$$\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}+1)=q_1 \tag{29}$$

其中，$q_1=\dfrac{2\beta_{hp}z_1-\varepsilon_l\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau}{2\beta_{hp}z_1-\varepsilon_l\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau}$。

下面验证$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$的存在和唯一性，对$x_l^{\mathrm{SA}}(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})$求关于$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*2}}=\frac{\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}s_l^*(\tau)(1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})}{6\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*2}}\left(z_1-\frac{\varepsilon_l}{2\beta_{hp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau\right)$$

根据式（29），令$F_1(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})=\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}+1)-q_1$，对$F_1(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})$求关于$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$的一阶导数，可得$\frac{\partial F_1(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}=(1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})\delta\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}$。即当$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}<\frac{1}{2\delta}$时，$\frac{\partial F_1(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}>0$；当$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}>\frac{1}{2\delta}$时，$\frac{\partial F_1(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}<0$。将$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}=\frac{1}{2\delta}$代入$F_1(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})$中，可得$F_1\left(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}=\frac{1}{2\delta}\right)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-q_1$。由于$q_1>0$，$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 1.21$，所以，在$1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}<0$条件下，能够保证$F_1(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})=0$成立。同时，由于$q_1$中分子和分母均应大于零，因此$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*2}}<0$。这说明存在唯一的$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$使得$x_l^{\mathrm{SE}}$最大。

对x_l^{SE}求关于Δt_{lb}的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{lb}}=\frac{s_l^*(t)F_2(\Delta t_{lb})}{6\delta\Delta t_{lb}} \tag{30}$$

其中，$F_2(\Delta t_{lb})=y_2(2\delta\Delta t_{lb}+1-\mathrm{e}^{\delta\Delta t_{lb}})\int_{t_0+\Delta t_{lb}}^{T}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}\tau-y_1\int_{t_0}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}\tau-y_2\int_{t_h}^{t_0+\Delta t_{lb}}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}\tau$。

根据最优化一阶条件，令$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{lb}}=0$可得满足如下等式的最优$\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}$为

$$y_2(2\delta\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}+1-\mathrm{e}^{\delta\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}})\int_{t_0+\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}}^{T}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}\tau=y_1\int_{t_0}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}\tau+y_2\int_{t_h}^{t_0+\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}\tau \tag{31}$$

下面验证$\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}$的存在和唯一性，对$x_l^{\mathrm{SE}}(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*})$求关于$\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}$的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*2}} = -\frac{y_2 s_l^*(t)}{6\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}}(2\delta\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}-1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}}$$

可见 $\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*2}} < 0$ 。因此，存在唯一的 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}$ 使得 x_l^{SE} 最大化。

继续对 x_l^{SE} 求关于 λ_l 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \lambda_l} = \frac{C_l}{6\delta}\left[\frac{z_2(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})}{s_l^*(\tau)\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}} - \frac{z_3(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*})}{s_l^*(t)\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}}\right] \tag{32}$$

其中，

$$z_2(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}) = z_1 - \frac{\varepsilon_l}{2}\int_0^{t_0}\frac{(1-\mathrm{e}^{\delta(t_0-\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}-\tau)})}{(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}})}\mathrm{d}\tau$$

$$z_3(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}) = y_1\int_{t_0}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}\tau + y_2\left[\int_{t_h}^{t_0+\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}\tau + (\mathrm{e}^{\delta(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}+t_0)} - \mathrm{e}^{\delta t_0})\int_{t_0+\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}}^{T}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

由最优化一阶条件，令 $\frac{\partial x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \lambda_l} = 0$ 可得最优 $\lambda_l^{\mathrm{SE}*}$ 为

$$\lambda_l^{\mathrm{SE}*} = \frac{1}{1+\frac{\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*} {z_3}^2(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*})}{\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*} {z_2}^2(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}})^2}} \tag{33}$$

下面验证 $\lambda_l^{\mathrm{SE}*}$ 的存在和唯一性，对 $x_l^{\mathrm{SE}}(\lambda_l^{\mathrm{SE}*})$ 求关于 $\lambda_l^{\mathrm{SE}*}$ 的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \lambda_l^{\mathrm{SE}*2}} = -\frac{C_l^2}{12\delta}\left[\frac{z_2(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_l^{\mathrm{SE}*}})}{s_l^{*3}(\tau)\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*2}} + \frac{z_3(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*})}{s_l^{*3}(t)\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*2}}\right]$$

由于 $z_2(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})$ 和 $z_3(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*})$ 均大于零，因此 $\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \lambda_l^{\mathrm{SE}*2}} < 0$ ，即 $\lambda_l^{\mathrm{SE}*}$ 的存在和唯一性成立。

在 $\alpha_p > \alpha_p^{\mathrm{S}*}$ 情况下，对 $x_l^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S}*})$ 求关于 Δt_{la} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial \Delta t_{la}} = \frac{\partial x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{la}} + Y\int_{t_{al}^{\mathrm{S}*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\frac{s_l^*(\tau)[(2\delta\Delta t_{la}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}}-1]}{6\delta{\Delta t_{la}}^2}\mathrm{d}t \tag{34}$$

其中，

$$\begin{aligned} Y = {} & \frac{3\eta\beta_{hp}\{F-\alpha_n(\beta_{lp}-\beta_{ln})[\alpha_p\kappa_l(3\beta_{hp}+3\beta_{lp}-4\beta_{ln})-\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp})]\}}{2\beta_{ln}F(\beta_{hp}-\beta_{lp})} \\ & +(3g-1)\left\{\frac{\eta\left[F-\alpha_n(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\kappa_l\alpha_p(3\beta_{hp}-2\beta_{ln})-\alpha_n(\beta_{hp}-\beta_{lp}-\beta_{ln}))\right]}{\beta_{ln}[F+\alpha_n(\alpha_p\kappa_l+\alpha_n)(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})]}\right. \\ & \left.+\frac{\varepsilon_l\alpha_n(\beta_{lp}-\beta_{ln})(\alpha_p\kappa_l+\alpha_n)}{\beta_{ln}\left[F+\alpha_n(\alpha_p\kappa_l+\alpha_n)(\beta_{hp}-\beta_{lp})(\beta_{lp}-\beta_{ln})\right]}\right\} + \frac{\varepsilon_l(1-3g)}{(\beta_{hp}-\beta_{lp})} - \frac{\eta\beta_{hp}}{\beta_{lp}(\beta_{hp}-\beta_{lp})} \end{aligned}$$

根据最优化一阶条件，令 $\frac{\partial x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial \Delta t_{la}} = 0$ 可得满足如下等式的最优 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}$ 为

$$(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}} = q_2 \tag{35}$$

其中，$q_2=\dfrac{2\beta_{hp}\left(z_1+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}t\right)-\varepsilon_l\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau}{2\beta_{hp}\left(z_1+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}t\right)-\varepsilon_l\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}-\delta\right)(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau}$。

下面验证 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}$ 的存在和唯一性。令 $F_3(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})=(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}}-q_2$，对 $F_3(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})$ 求关于 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}$ 的一阶导数，可得 $\dfrac{\partial F_3(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})}{\partial\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}}=\delta\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}}(1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})$。可见，当 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}>\dfrac{1}{2\delta}$ 时，$\dfrac{\partial F_3(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})}{\partial\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}}<0$；当 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}<\dfrac{1}{2\delta}$ 时，$\dfrac{\partial F_3(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})}{\partial\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}}>0$。因此，在 $1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}<0$ 条件下，能保证式（35）成立。对 $x_l^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S*}})$ 求关于 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}$ 的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*2}}}=\frac{\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}}s_l^*(\tau)(1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})}{6\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*2}}}\left(z_1+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}t-\frac{\varepsilon_l}{2\beta_{hp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}+\delta\right)(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau\right)$$

由于 $1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}<0$ 且 q_2 中分子和分母均应大于零，因此 $\dfrac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*2}}}<0$。这说明存在唯一的 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}$ 使得 x_l^{SA} 最大。

对 $x_l^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S*}})$ 求关于 Δt_{lb} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S*}})}{\partial\Delta t_{lb}}=\frac{s_l^*(t)}{6\delta\Delta t_{lb}}\left[F_2(\Delta t_{lb})-Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}t\right] \tag{36}$$

由最优化一阶条件，令 $\dfrac{\partial x_l^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S*}})}{\partial\Delta t_{lb}}=0$ 可得满足如下等式的最优 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*}}$ 为

$$F_2(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*}})=Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}t \tag{37}$$

$\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*}}$ 存在和唯一性的证明过程和 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE*}}$ 类似，因此省略。

对 $x_l^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S*}})$ 求关于 λ_l 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial\lambda_l}=\frac{C_l}{6\delta}\left[\frac{(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}})}{s_l^*(\tau)\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}}\left(z_2(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}t\right)-\frac{z_3(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*}})+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}t}{s_l^*(t)\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*}}}\right] \tag{38}$$

根据最优化一阶条件，令 $\dfrac{\partial x_l^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S*}})}{\partial\lambda_l}=0$ 可得最优 $\lambda_l^{\mathrm{SA*}}$ 为

$$\lambda_l^{\mathrm{SA*}}=\frac{1}{1+\dfrac{\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}\left[z_3(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*}})+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}t\right]^2}{\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*}}(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}})^2\left(z_2(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}t\right)^2}} \tag{39}$$

下面验证 $\lambda_l^{\mathrm{SA*}}$ 的存在和唯一性。对 $x_l^{\mathrm{SA}}(t_{al}^{\mathrm{S*}})$ 求关于 $\lambda_l^{\mathrm{SA*}}$ 的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial\lambda_l^{\mathrm{SA*2}}}=-\frac{C_l^2}{12\delta}\left[\frac{(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}}})\left(z_2(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*}})+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}t\right)}{s_l^{*3}(\tau)\Delta t_{la}^{\mathrm{SA*2}}}+\frac{z_3(\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*}})+Y\int_{t_{al}^{S*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)})\mathrm{d}t}{s_l^{*3}(t)\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA*2}}}\right]$$

显然 $\dfrac{\partial^2 x_l^{\mathrm{SA}}}{\partial\lambda_l^{\mathrm{SA*2}}}<0$，因此，存在唯一的 $\lambda_l^{\mathrm{SA*}}$ 使得 x_l^{SA} 最大。

根据式（34），令

$$F_4(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*})=\frac{\partial x_l^{\mathrm{SE}}}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{S}*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\frac{s_l^*(\tau)[(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}-1]}{6\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*2}}\mathrm{d}t \tag{40}$$

根据隐函数求导法则，对 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}$ 求关于 g 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}{\partial g}=-\frac{(\partial Y/\partial g)s_l^*(\tau)\left[(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}-1\right]\int_{t_{al}^{\mathrm{S}*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}t}{6\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*2}\left[\partial F_4(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*})/\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}\right]}$$

由于 $\dfrac{\partial F_4(\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*})}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}<0$ 、$\dfrac{\partial Y}{\partial g}>0$ ，所以 $\dfrac{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}{\partial g}>0$ ，且 $\lim\limits_{g\to g_S^*}\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}=\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$ ，因此，$\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}>\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$ ，两者之差可表示为 $\Delta_a^{\mathrm{S}}=\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}-\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$ 。同理可证 $\lambda_l^{\mathrm{SA}*}>\lambda_l^{\mathrm{SE}*}$ ，$\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}>\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA}*}$ ，则有 $\Delta_{\lambda_l}^{\mathrm{S}}=\lambda_l^{\mathrm{SA}*}-\lambda_l^{\mathrm{SE}*}$ ，$\Delta_b^{\mathrm{S}}=\Delta t_{lb}^{\mathrm{SE}*}-\Delta t_{lb}^{\mathrm{SA}*}$ 。

结论 3 证明：根据式（28），令

$$F_5(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})=z_1[(2\delta\Delta t_{la}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}-1]-\frac{\varepsilon_l}{2\beta_{hp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}[(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}+1)\mathrm{e}^{\delta(t_0-\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}-\tau)}-1]\mathrm{d}\tau$$

根据隐函数求导法则，对 $\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}$ 求关于 ε_l 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}{\partial \varepsilon_l}=-\frac{2\beta_{hp}[(2\delta\Delta t_{la}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}-1]\dfrac{\partial z_1}{\partial \varepsilon_l}-\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}[(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}+1)\mathrm{e}^{\delta(t_0-\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}-\tau)}-1]\mathrm{d}\tau}{2\beta_{hp}\left[\partial F_5(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})/\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}\right]}$$

由于 $\dfrac{\partial F_5(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}<0$ 且 $\dfrac{\partial z_1}{\partial \varepsilon_l}<0$ ，因此，$\dfrac{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}{\partial \varepsilon_l}<0$ 。令 $F_5(\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*})=0$ ，可得临界值 $\varepsilon_l^{\mathrm{SE}*}=\dfrac{2\beta_{hp}z_1[(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}-1]}{\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}\left[(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}+1)\mathrm{e}^{\delta(t_0-\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}-\tau)}-1\right]\mathrm{d}\tau}$ ，当 $\varepsilon_l>\varepsilon_l^{\mathrm{SE}*}$ 时，$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}=0$ 。同理，可证 $\dfrac{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}{\partial \varepsilon_l}<0$ ，且存在临界值 $\varepsilon_l^{\mathrm{SA}*}=\dfrac{2\beta_{hp}[(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}-1]\left(z_1+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{S}*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta(\tau-t_0)}\mathrm{d}t\right)}{\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}[(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}+1)\mathrm{e}^{\delta(t_0-\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}-\tau)}-1]\mathrm{d}\tau}$ ，当 $\varepsilon_l>\varepsilon_l^{\mathrm{SA}*}$ 时，$\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}=0$ 。

结论 4 证明：在情形 I，同理结论 1 的分析过程，可得劣势运营商在不提前推出免费模式情况下，当 $t_{dl}=t_h$ 时，可使用户量最大。因此，通过计算可得劣势运营商在同步推出免费模式和提前推出免费模式的不同情况下，播放期内观看节目的总用户量分别为

$$x_l^{\mathrm{IE}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x_l^{\mathrm{I}}(t_0)+\frac{1}{3}\int_{t_0}^{t_h}M_3(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{3}\int_{t_h}^{T}E_m(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{41}$$

$$x_l^{\mathrm{IA}}=x_l^{\mathrm{IE}}+N_{\mathrm{I}} \tag{42}$$

其中，

$$x_l^{\mathrm{I}}(t_0)=\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}\left(1+\frac{1}{\beta_{lp}}f_l(\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

$$N_{\mathrm{I}}=\int_{t_{al}}^{t_h}\left[\left(g-\frac{1}{3}\right)D^{\mathrm{IA}}(t)+S(t)\right]\mathrm{d}t,\quad D^{\mathrm{IA}}(t)=G(1-x^{\mathrm{IA}}(t))+E(t)$$

由式（41）和式（42）可得 $x_l^{\mathrm{IE}}-x_l^{\mathrm{IA}}=-N_{\mathrm{I}}$，令 $N_{\mathrm{I}}=0$，可知存在 $g_{\mathrm{I}}^{*}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\int_{t_{al}}^{t_h}S(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_{al}}^{t_h}D^{\mathrm{IA}}(t)\mathrm{d}t}$，当 $g>g_{\mathrm{I}}^{*}$ 时，$N_{\mathrm{I}}>0$；反之，$N_{\mathrm{I}}<0$。进一步分解 g_{I}^{*}，可得存在 $\alpha_p^{\mathrm{I}*}=\dfrac{\alpha_n}{\kappa_l}-\dfrac{3F\int_{t_{al}}^{t_h}S(t)\mathrm{d}t}{\kappa_l(\beta_{hp}-\beta_{lp})[\alpha_n(2\beta_{lp}-\beta_{ln})-\kappa_l\alpha_p^{\mathrm{I}*}\beta_{ln}]\int_{t_{al}}^{t_h}D^{\mathrm{IA}}(t)\mathrm{d}t}$，当 $\alpha_p>\alpha_p^{\mathrm{I}*}$ 时，$x_l^{\mathrm{IA}}>x_l^{\mathrm{IE}}$；反之，$x_l^{\mathrm{IA}}<x_l^{\mathrm{IE}}$。

在 $\alpha_p>\alpha_p^{\mathrm{I}*}$ 情况下，对 x_l^{IA} 求关于 t_{al} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial t_{al}}=\left(\frac{1}{3}-g\right)D^{\mathrm{IA}}(t_{al})-S(t_{al})$$

根据最优化一阶条件，令 $\dfrac{\partial x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial t_{al}}=0$ 可得满足如下等式的最优 $t_{al}^{\mathrm{I}*}$ 为

$$\left(\frac{1}{3}-g\right)D^{\mathrm{IA}}(t_{al}^{\mathrm{I}*})=S(t_{al}^{\mathrm{I}*}) \tag{43}$$

$t_{al}^{\mathrm{I}*}$ 存在和唯一性的证明过程和结论 1 中 $t_{al}^{\mathrm{S}*}$ 类似，为此省略。

结论 5 证明：对式（41）x_l^{IE} 求关于 Δt_{la} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial \Delta t_{la}}=\frac{s_l^{*}(\tau)}{6\delta\Delta t_{la}{}^{2}}\left(\frac{\eta}{\beta_{lp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}+\delta\right)(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-\delta t_0}z_1\right)[(2\delta\Delta t_{la}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}}-1]$$

由最优化一阶条件，令 $\dfrac{\partial x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial \Delta t_{la}}=0$ 可得满足如下等式的最优 $\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$ 为

$$(2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}}=1 \tag{44}$$

下面验证 $\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$ 的存在和唯一性。对 x_l^{IE} 求关于 $\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$ 的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{I}*2}}=\frac{s_l^{*}(\tau)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}}}{6\Delta t_{la}{}^{2}}\left(\frac{\eta}{\beta_{lp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}+\delta\right)(t_0-\tau)}\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-\delta t_0}z_1\right)(1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*})$$

由式（44）可知，只有当 $1-2\delta\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}<0$ 时，最优化一阶条件才成立，因此，$\dfrac{\partial^2 x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{I}*2}}<0$。这说明 $\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$ 的存在和唯一性成立。

对 x_l^{IE} 求关于 Δt_{lb} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial \Delta t_{lb}}=\frac{s_l^{*}(t)}{6\delta\Delta t_{lb}}F_6(\Delta t_{lb})$$

其中，

$$F_6(\Delta t_{lb})=y_2(2\delta\Delta t_{lb}+1-\mathrm{e}^{\delta\Delta t_{lb}})\int_{\Delta t_{lb}}^{T}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau-y_2\int_{t_h}^{\Delta t_{lb}}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau$$
$$-\frac{\eta}{\beta_{lp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau-y_1\int_{t_0}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau$$

根据最优化一阶条件，令 $\dfrac{\partial x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial \Delta t_{lb}}=0$ 可得满足如下等式的最优 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}$ 为

$$y_2(2\delta\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}+1-\mathrm{e}^{\delta\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}})\int_{\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}}^{T}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\eta}{\beta_{lp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau+y_1\int_{t_0}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau+y_2\int_{t_h}^{\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau \quad (45)$$

下面验证 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}$ 的存在和唯一性。对 x_l^{IE} 求关于 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}$ 的二阶导数，可得 $\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*2}}=-\frac{y_2 s_l^*(t)}{6\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}}(2\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}-1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}}$。因此 $\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*2}}<0$，这说明 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}$ 的存在和唯一性成立。

对 x_l^{IE} 求关于 λ_l 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial\lambda_l}=\frac{C_l}{6\delta}\left[\frac{z_4(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_l^{\mathrm{I}*}})}{s_l^*(\tau)\Delta t_l^{\mathrm{I}*}}-\frac{z_5(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*})}{s_l^*(t)\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}}\right]$$

其中，

$$z_4=\frac{\eta}{\beta_{lp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)-\delta\tau}\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-\delta t_0}z_1$$

$$z_5(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*})=\frac{\eta}{\beta_{lp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau+y_1\int_{t_0}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau+y_2\left[\int_{t_h}^{\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau+(\mathrm{e}^{\delta\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}}-1)\int_{\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}}^{T}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

由最优化一阶条件，令 $\frac{\partial x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial\lambda_l}=0$ 可得最优 $\lambda_l^{\mathrm{IE}*}$ 为

$$\lambda_l^{\mathrm{SE}*}=\frac{z_4{}^2\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_l^{\mathrm{I}*}})^2}{z_5{}^2(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*})\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}+z_4{}^2\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_l^{\mathrm{I}*}})^2} \quad (46)$$

下面验证 $\lambda_l^{\mathrm{IE}*}$ 的存在和唯一性。对 x_l^{IE} 求关于 $\lambda_l^{\mathrm{IE}*}$ 的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial\lambda_l{}^{\mathrm{IE}*2}}=-\frac{C_l{}^2}{12\delta}\left[\frac{z_4(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_l^{\mathrm{I}*}})}{s_l^{*3}(\tau)\Delta t_{la}^{\mathrm{IE}*2}}+\frac{z_5(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*})}{s_l^{*3}(t)\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*2}}\right]$$

因此 $\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{IE}}}{\partial\lambda_l{}^{\mathrm{IE}*2}}<0$，这说明 $\lambda_l^{\mathrm{IE}*}$ 的存在和唯一性成立。

对式（42）x_l^{IA} 求关于 Δt_{la} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial\Delta t_{la}}=\frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{\beta_{lp}}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t_0-\tau)-\delta\tau}\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-\delta t_0}z_1+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau\right)[(2\delta\Delta t_{la}+1)\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_{la}}-1]$$

由最优化一阶条件，令 $\frac{\partial x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial\Delta t_{la}}=0$ 可得满足如下等式的最优 $\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$ 和式（44）一致，因此，解的存在和唯一性不再赘述。

对 x_l^{IA} 求关于 Δt_{lb} 的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial\Delta t_{lb}}=\frac{s_l^*(t)}{6\delta\Delta t_{lb}}\left[F_6(\Delta t_{lb})-Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau\right]$$

根据最优化一阶条件，令 $\frac{\partial x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial\Delta t_{lb}}=0$ 可得满足如下等式的最优 $\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}$ 为

$$F_6(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*})=Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau \quad (47)$$

$\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}$存在和唯一性的证明过程和$\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}$类似，因此省略。

对x_l^{IA}求关于λ_l的一阶导数，可得

$$\frac{\partial x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial \lambda_l}=\frac{C_l}{6\delta}\left[\frac{(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_l^{\mathrm{I}*}})\left(z_4+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau\right)}{s_l^*(\tau)\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}}-\frac{z_5(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*})+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau}{s_l^*(t)\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}}\right]$$

根据最优化一阶条件，令$\frac{\partial x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial \lambda_l}=0$可得最优$\lambda_l^{\mathrm{IA}*}$为

$$\lambda_l^{\mathrm{IA}*}=\frac{1}{1+\frac{\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}\left[z_5(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*})+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau\right]^2}{\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_l^{\mathrm{I}*}})^2\left(z_4+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau\right)^2}} \tag{48}$$

下面验证$\lambda_l^{\mathrm{IA}*}$的存在和唯一性。对x_l^{IA}求关于$\lambda_l^{\mathrm{IA}*}$的二阶导数，可得

$$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial \lambda_l^{\mathrm{IA}*2}}=-\frac{C_l^2}{12\delta}\left[\frac{(1-\mathrm{e}^{-\delta\Delta t_l^{\mathrm{I}*}})\left(z_4+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}\mathrm{e}^{-\delta\tau}\mathrm{d}\tau\right)}{s_l^{*3}(\tau)\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*2}}+\frac{z_5(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*})+Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau}{s_l^{*3}(t)\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*2}}\right]$$

由于$\frac{\partial^2 x_l^{\mathrm{IA}}}{\partial \lambda_l^{\mathrm{IA}*2}}<0$，因此$\lambda_l^{\mathrm{IA}*}$的存在和唯一性成立。

根据式（47），令$F_7(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*})=F_6(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*})-Y\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau$，根据隐函数求导法则，对$\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}$求关于$g$的一阶导数，可得$\frac{\partial \Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}}{\partial g}=\frac{(\partial Y/\partial g)\int_{t_{al}^{\mathrm{I}*}}^{t_h}(1-\mathrm{e}^{-\delta\tau})\mathrm{d}\tau}{\partial F_7(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*})/\partial \Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}}$，由于$\frac{\partial Y}{\partial g}>0$、$\frac{\partial F_7(\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*})}{\partial \Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}}<0$，因此$\frac{\partial \Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}}{\partial g}<0$，且$\lim_{g\to g_I^*}\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}=\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}$，因此，$\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}>\Delta t_{lB}^{\mathrm{SA}*}$，两者之差可表示为$\Delta_b^I=\Delta t_{lb}^{\mathrm{IE}*}-\Delta t_{lb}^{\mathrm{IA}*}$。同理可证$\lambda_l^{\mathrm{IA}*}>\lambda_l^{\mathrm{IE}*}$，则有$\Delta_{\lambda_l}^{\mathrm{I}}=\lambda_l^{\mathrm{IA}*}-\lambda_l^{\mathrm{IE}*}$。

结论 6 证明：由式（44）可知$\frac{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{IA}*}}{\partial \varepsilon_l}=0$，同时根据结论 3 $\frac{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}}{\partial \varepsilon_l}<0$、$\frac{\partial \Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}}{\partial \varepsilon_l}<0$，且$\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*}(\varepsilon_l=0)=\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$、$\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}(\varepsilon_l=0)=\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}$，因此$\Delta t_{la}^{\mathrm{I}*}>\max\{\Delta t_{la}^{\mathrm{SE}*},\Delta t_{la}^{\mathrm{SA}*}\}$。